Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Konstrukce trojúhelníka na základě zadaných bodů

Construction of a Triangle from specified points

Jan Tuška

Vedoucí práce:	Mgr. Marie Holíková, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednooborové studium

Praha, 2018

[Sem zadejte text.]

Odevzdáním této bakalářské práce na téma „Konstrukce trojúhelníka na základě zadaných bodů“ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Rovněž potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Zde bych rád, nikoli ovšem z konvenčních důvodů, využil příležitosti a tímto vyjádřil poděkování Mgr. Marii Holíkové, Ph.D. za veškeré rady a doporučení týkající se této bakalářské práce, rovněž tak za vstřícnost a zájem o práci projevený. Vědomí podpory mi bylo nápomocné v otázce motivace i snížení stresu.

[Sem zadejte text.]

Abstrakt

Práce nabízí náhled na konstrukce trojúhelníka, jsou-li známy pouze polohy některých jeho bodů. Rozborům případů předchází zmínění několika důležitých tvrzení, vztahů využitých v konstrukcích a zamyšlení nad zadáními, které nevedou k řešení. V samotných rozborech případů je nejprve zadána kombinace bodů, následně je provedena konstrukce s vysvětlivkami, zápis konstrukce a konečně je provedena diskuze řešení. Využitými body jsou vrcholy trojúhelníka, středy jeho stran, těžiště, ortocentrum, střed kružnice opsané, body doteku kružnice vepsané trojúhelníku, střed kružnice vepsané, střed kružnice připsané a body doteku kružnice připsané trojúhelníku. Práce obsahuje obrázky vytvořené v GeoGebře.

Klíčová slova: trojúhelník, konstrukce, bod

Abstract

The thesis offers a view on constructions of triangles, when only locations of points are known. Some of important theorems, relations used in constructions are mentioned, as well as reflection of cases not leading to a solution. In the analyses, there is first given a combination of points, then the construction is carried out and described, construction is noted and finally there is a discussion regarding solution. Points used in the thesis are vertices of the triangle, centers of its sides, centroid, orthocenter, circumcenter, tangent points of the incircle, incenter, excenter and tangent points of the excircle. The thesis contains pictures made in GeoGebra.

Keywords: triangle, construction, point

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce nabízí čtenáři náhled na konstrukce trojúhelníka, jsou-li zadány pouze polohy některých jeho významných bodů. Součástí zadání tak nejsou délkové vztahy. Ke konstrukcím jsou využívány vlastnosti bodů, jejich vzájemné vztahy v trojúhelníku a další vlastnosti trojúhelníka.

Inspirací k tématu Konstrukce trojúhelníka na základě zadaných bodů byl příklad ze skript Boček, Zhouf (2012): Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li dán vrchol C, průsečík výšek V a střed kružnice opsané S. Samotná konstrukce je sice zajímavá, o mnoho zajímavější a bohatší je ale diskuze řešení, která ve výsledcích skript uvedena není. Za jakých podmínek lze trojúhelník sestrojit? Existuje vždy jen jedno řešení, nebo jich může být více? V této práci naleznete jak konstrukci, tak diskuzi řešení nejen tohoto příkladu, ale i dalších zadání, která vznikla kombinací významných bodů v trojúhelníku. Přestože není čerpáno z velkého množství různých významných bodů, práce dokazuje, že se jedná o velice rozsáhlé téma.

Práce obsahuje nejprve seznam využitých značení. Dále jsou zadefinovány důležité pojmy a dokázány některé základní vztahy, které jsou využívány v rozborech jednotlivých případů. Následuje stručné shrnutí některých možností, které nikdy nevedou k řešení. Stěžejní část práce pak obsahují jednotlivá zadání (sestrojení trojúhelníka na základě zadané kombinace bodů), jejich konstrukce a diskuze řešení. Rozebraných případů je celkem dvanáct, každému je věnována samostatná kapitola. Práce je doplněna o mnoho obrázků vytvořených v programu GeoGebra.

Povšiml jsem si, že v úvodech bakalářských prací bývá zvykem utrousit odstavec týkající se motivace a cílů. Téma mi je sice o něco bližší než ostatní, na která jsem narazil, ale komparativ je v tomto případě slabší nežli nominativ – bohužel z něj neplyne, že by se o činnost zábavnou a plnou vnitřní motivace jednalo. Za skutečný cíl zpracování tématu tak mám spíše splnění povinnosti vyžadované k dokončení mnou studovaného oboru. Odsud neplyne, že samotný obsah cíl nebo smysl nemá – jsem přesvědčen, že práce může čtenáři nabídnout zajímavou optiku na konstrukce trojúhelníků. Z diskuzí případů je pak například možné čerpat ne vždy intuitivní nebo zřejmé informace o tom, jak jednotlivé případy zadávat jako příklady k řešení. Budiž toto cílem práce, o kterém bývá běžně hovořeno.

Seznam značení bodů a další označení

$A, B, C, \dots$	Vrcholy trojúhelníka a další body
a, b, c	Strany trojúhelníka (úsečky BC, AC, AB)
S_a, S_b, S_c	Středy stran a, b, c
T	Těžiště
V	Ortocentrum
V_a, V_b, V_c	Paty výšek na strany a, b, c
S	Střed kružnice opsané
O	Střed kružnice vepsané
G_a, G_b, G_c	Body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku s tímto trojúhelníkem
P_a, P_b, P_c	Středy kružnic připsaných, které se dotýkají příslušné strany a, b, nebo c
N_a, N_b, N_c	Body dotyku kružnic připsaných trojúhelníku, náležící stranám a, b, nebo c
$A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$	Body dotyku kružnic připsaných trojúhelníku, neležící na jeho stranách
XY	Úsečka s krajními body X a Y
$\overleftrightarrow{XY}; p, q, \dots$	Přímka určená body X, Y; přímka $p, q, \dots$
$\overleftrightarrow{XY}Z, pZ$	Polorovina ohraničená přímkou $\overleftrightarrow{XY}$ (přímkou p), která obsahuje bod Z
$\longmapsto XY$	Polopřímka vycházející z bodu X procházející bodem Y
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	Značení úhlů písmeny řecké abecedy
$\sphericalangle XYZ$	Úhel s vrcholem Y a rameny $\longmapsto YX, \longmapsto YZ$
$\lvert XY \rvert$	Velikost úsečky XY
$\lvert \sphericalangle XYZ \rvert$	Velikost úhlu $\sphericalangle XYZ$
$X \in p$	X náleží p
$p \cap q$	Průnik p a q
$p \parallel q$	p je rovnoběžná s q
$p \perp q$	p je kolmá na q
$H(X, k): Y \to Y'$	Stejnolehlost se středem v bodě X, koeficientem k, zobrazující bod Y na Y'

Některé definice a důkazy využité v konstrukcích a diskuzích

Trojúhelník, jeho vnitřní úhly

Je vhodné započít definicí trojúhelníka. Kuřina (1996) se zmiňuje o následující:

Definice: Trojúhelník $\triangle ABC$ je průnik polorovin $\overleftrightarrow{AB}C, \overleftrightarrow{BC}A$ a $\overleftrightarrow{AC}B$.

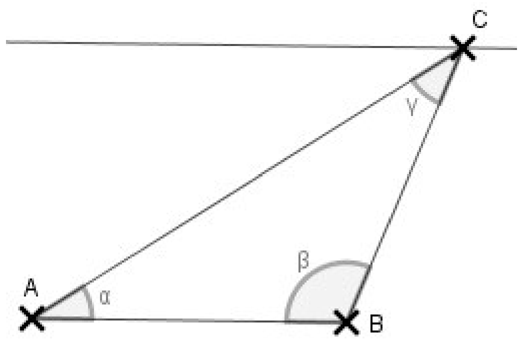
Body A, B, C nesmí být kolineární, aby jednotlivé poloroviny byly jednoznačně určeny.

Tentýž autor mluví ještě o další definici:

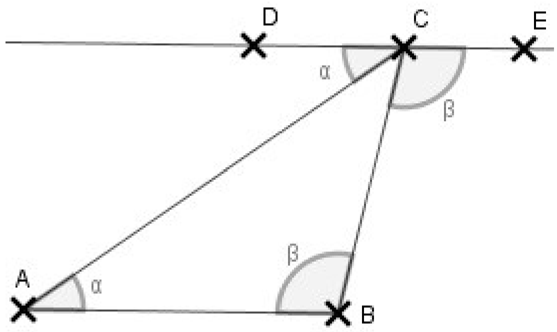
Definice: Trojúhelník je omezená část roviny ohraničená jednoduchou uzavřenou lomenou čarou složenou ze tří úseček.

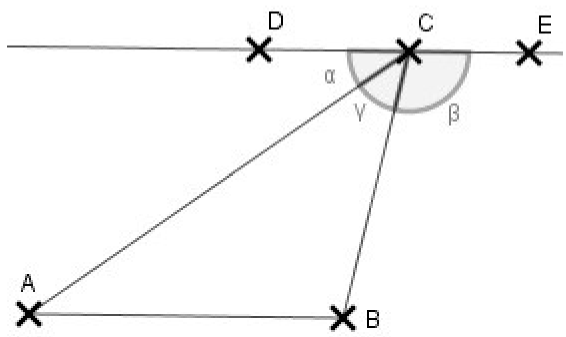
Tvrzení: Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je $180°$.

Důkaz tvrzení lze provést velmi stručně. Sestrojme rovnoběžku s jednou stranou tak, aby procházela vrcholem, který této straně nenáleží. Znázorněme spolu se standardně značenými úhly:



Doplníme pomocné body D a E. Díky rovnosti střídavých úhlů je zřejmé, že $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA$. Nápodobně také $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCE$ (obrázek vlevo). Součet $|\sphericalangle DCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCE|$ je zcela určitě roven přímému úhlu $\sphericalangle DCE$, jehož velikost je $180°$.





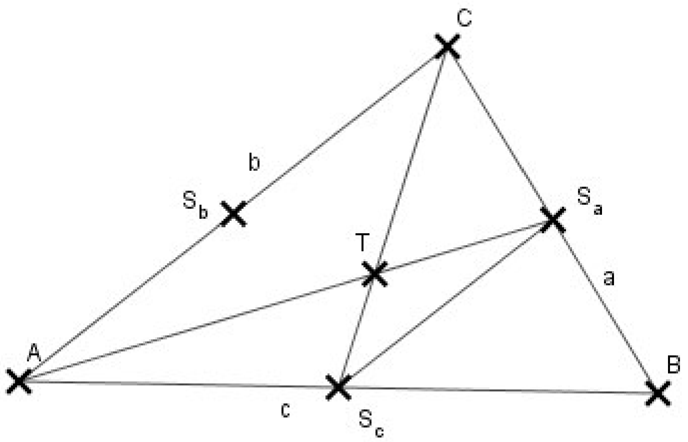
Těžnice a těžiště

Definice: Těžnicí rozumíme úsečku, která spojuje vrchol trojúhelníka se středem jemu protější strany.

Definice: Těžištěm rozumíme bod, kde se protínají všechny tři těžnice.

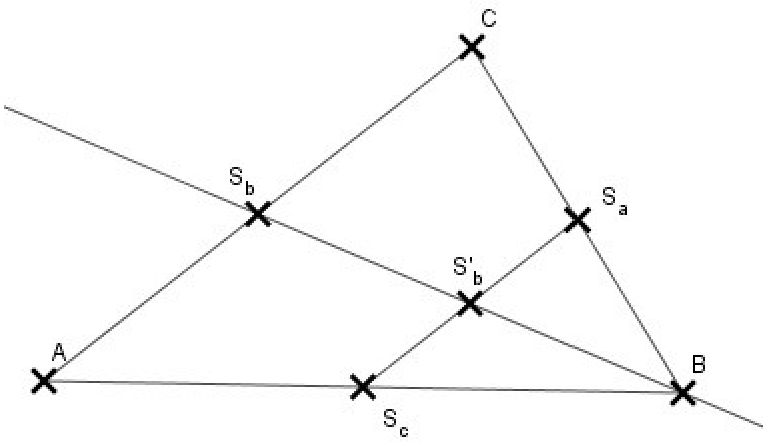
Důkaz existence provádí Kuřina (1996) s využitím pomocného rovnoběžníku, Boček a Zhouf (2012) pomocí Cévovy věty, Švrček a Vanžura (1988) dvěma způsoby – jednou pomocí Cévovy věty a jednou pomocí stejnolehlosti.

Parafrázujme důkaz Švrčka a Vanžury (1988) s využitím stejnolehlosti:

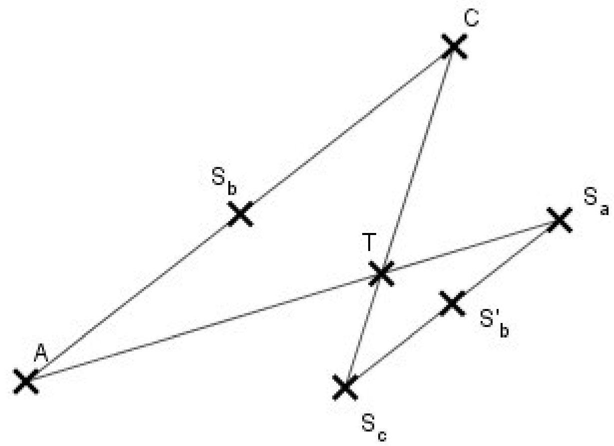


Je zřejmé, že úsečky AS_a a CS_c se v trojúhelníku protínají. Průsečík označíme T. Chceme dokázat, že i úsečka BS_b tímto bodem prochází.

Trojúhelník $\varDelta S_cBS_a$ můžeme chápat jako stejnolehlý obraz trojúhelníka $\varDelta ABC$, délky jeho stran jsou přesně poloviční. Označíme-li tedy střed úsečky S_aS_c jako S'_b, můžeme si být jisti, že body S_b, S_b', B leží na téže přímce.



To ale není jediná stejnolehlost, kterou v konstrukci nalezneme.



Je patrné, že i trojúhelníky $\varDelta ATC$ a $\varDelta S_a T S_c$ jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě T. Z toho plyne, že body S_b, T, S'_b leží na téže přímce.

Víme tedy, že zároveň S_b, S_b', B i S_b, T, S'_b leží na téže přímce. Ta ale musí být stejná, protože obě trojice bodů sdílí dva společné body (přičemž $S_b \neq S'_b$). Tedy i úsečka BS_b obsahuje bod T, a všechny tři těžnice se tak v jednom bodě protínají.

Stejnolehlosti použité v důkazu se dají ještě využít pro dokázání dalšího tvrzení:

Tvrzení: Těžiště trojúhelníka dělí každou z těžnic v poměru $2 : 1$, přičemž delší úsek leží vždy při vrcholu trojúhelníka (Švrček, Vanžura, 1988).

První stejnolehlost v minulém důkaze je s koeficientem $\frac{1}{2}$, tj. $H\left(B, \frac{1}{2}\right): \varDelta ABC \to \varDelta S_c B S_a$, protože S_c a S_a jsou středy stran AB a BC. Proto víme, že $2|S_c S_a| = |AB|$. Odsud je patrné, že druhá stejnolehlost v předchozím důkazu rovněž zmenšovala na polovinu – odsud plyne $|S_b T| = 2|S'_b T|$. Vyjádříme-li $|TB|$ s pomocí zjištěných vztahů, získáme

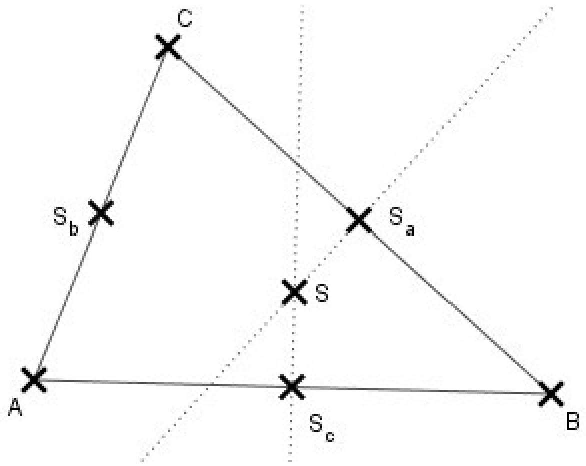
$$\begin{aligned} |TB| &= |S'_b T| + |S'_b B| = |S'_b T| + |S_b S'_b| = |S'_b T| + |S_b T| + |S'_b T| = |S_b T| + 2|S'_b T| \\ &= |S_b T| + |S_b T| = 2|S_b T| \end{aligned}$$

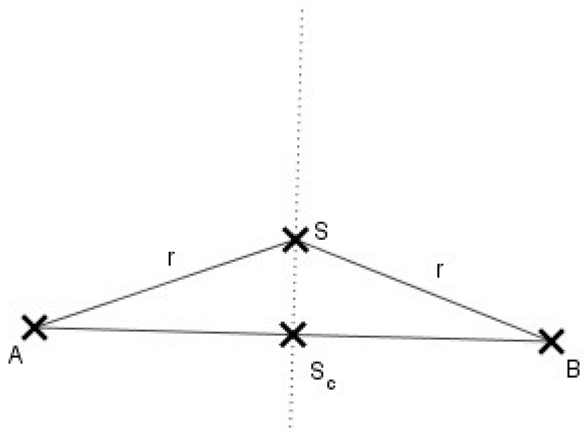
Analogicky lze dokázat pro zbylé dvě těžnice.

Kružnice opsaná, střed kružnice opsané

Definice: Kružnice opsaná trojúhelníku $\triangle ABC$ je taková kružnice, na které leží všechny tři vrcholy trojúhelníka. Střed této kružnice se nachází v průsečíku os stran.

Dokažme existenci. Určitě můžeme sestrojit osy dvou stran pro daný trojúhelník. Strany trojúhelníka nemohou být rovnoběžné, proto ani jejich osy ne – mají tedy společný průsečík, ten označíme S.

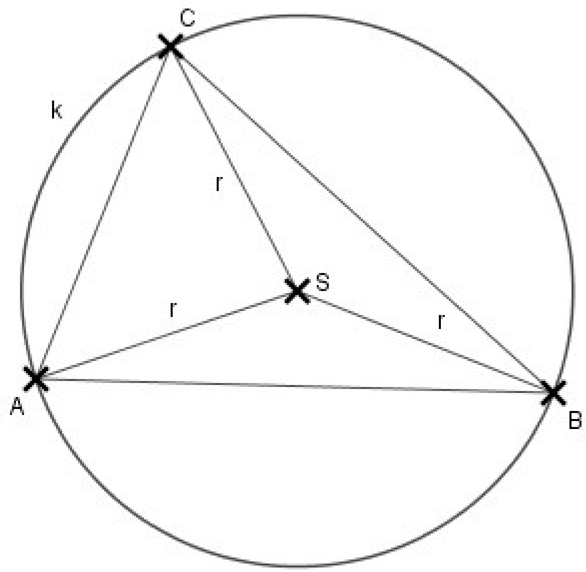




Tento bod leží na ose úsečky AB - platí $|AS| = |BS|$.

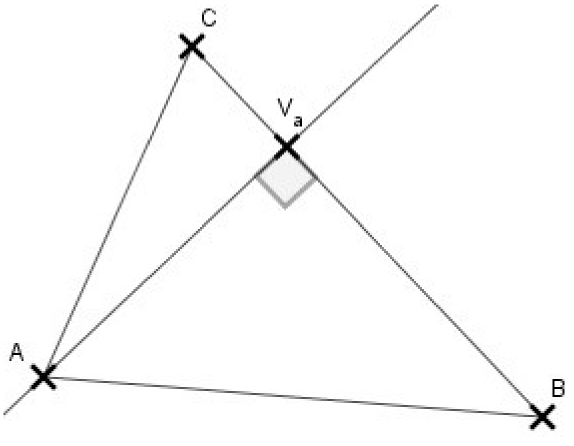
Bod ale zároveň leží na ose úsečky BC, platí tedy $|BS| = |CS|$.

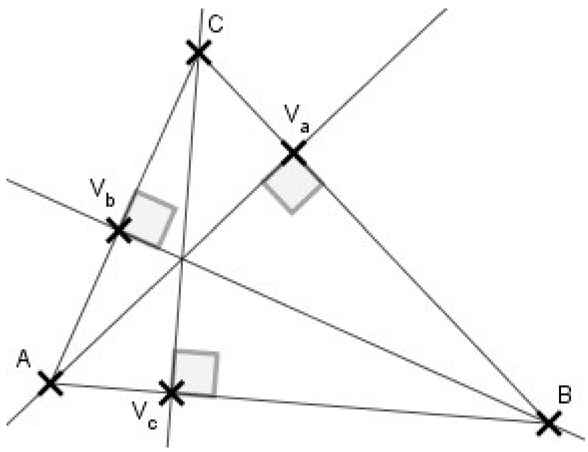
Obě rovnosti platí zároveň, proto platí také $|AS| = |CS|$. To znamená, že bod S je stejně vzdálen od každého vrcholu – sestrojením kružnice se středem v S a poloměrem $|AS| = |BS| = |CS|$ obdržíme kružnici opsanou trojúhelníku $\triangle ABC$.



Výšky v trojúhelníku a ortocentrum

Mějme trojúhelník $\triangle ABC$. Můžeme sestrojit kolmice na každou z přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ tak, že prochází vždy zbylým vrcholem (kolmice na $\overleftrightarrow{AB}$ procházející C atd.). Průsečíky kolmic s přímkami $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ označíme postupně V_c, V_a, V_b.



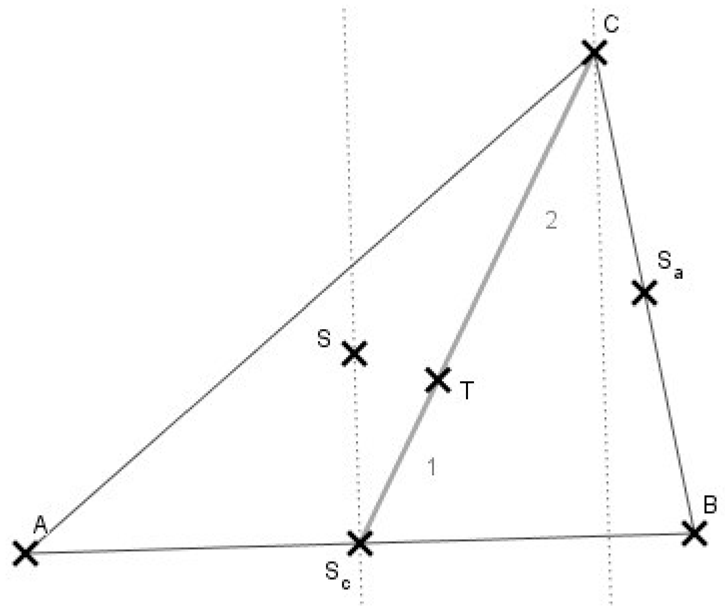


Definice: Výškou v trojúhelníku nazýváme spojnice bodů A a V_a, B a V_b, C a V_c.

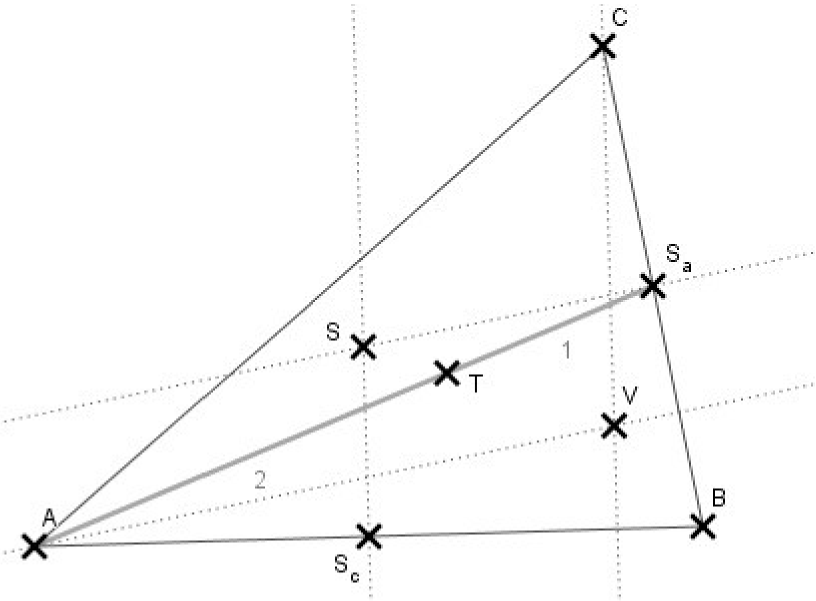
Švrček a Vanžura (1988) podle potřeby nazývají výškami buďto přímky $\overleftrightarrow{AV_a}, \overleftrightarrow{BV_b}, \overleftrightarrow{CV_c}$, nebo pouze úsečky AV_a, BV_b, CV_c.

Definice: Ortocentrum trojúhelníka je bod, ve kterém se protínají všechny tři výšky v daném trojúhelníku.

Důkaz existence provádí Švrček, Vanžura (1988) i Boček, Zhouf (2012) pomocí Cévovy věty. Kuřina (1996) existenci ortocentra dokazuje ještě před důkazem Cévovy věty, kterou nevyužívá. Užijeme souvislost s osami stran a stejnolehlostí, již Kuřina (1996) uvádí.



Zásadním pozorováním pro důkaz je, že osa strany je, stejně jako výška, kolmá na danou stranu. Stejnolehlost se středem v T a koeficientem -2, která převádí bod S_c na C, tak převádí i osu strany na výšku téže strany. Toto můžeme stejně provést i pro ostatní osy a výšky stran. Existoval-li tedy průsečík os stran – střed kružnice opsané, pomocí stejnolehlosti musíme obdržet průsečík výšek - ortocentrum.



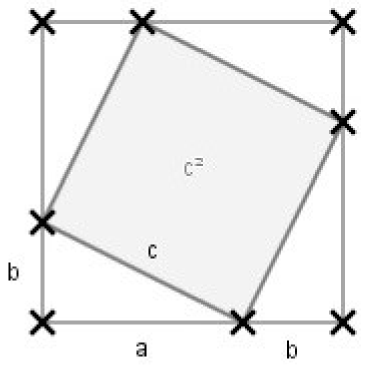
Tím se navíc dovídáme, že střed kružnice opsané, těžiště a ortocentrum jsou vždy kolineární a že můžeme získat umístění třetího bodu ze znalosti lokace zbylých dvou bodů. Přímka, na které tyto body leží, je nazývána Eulerovou přímkou. V rovnostranném trojúhelníku zmíněné body splývají - přímka tak není jednoznačně určena. Kvůli této výjimce se v této bakalářské práci používání termínu Eulerovy přímky vyhneme a namísto toho budeme užívat zmíněné stejnolehlosti, protože je obecnější.

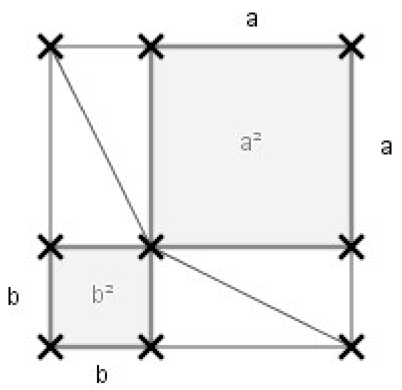
Pythagorova věta

Tvrzení: V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou délky c a odvěsnami délky a, b platí rovnost[1]

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dokažme názorně pomocí obrázků: Následující dva obrázky jsou čtverce o stranách $a + b$. V obou případech jsou uvnitř čtverce čtyři pravoúhlé trojúhelníky o odvěsnách a, b a přeponě c. Pouhým přeskládáním uvnitř čtverce vyjádříme zbylé plochy - jak c^2, tak i $a^2 + b^2$. Je zřejmé, že se musí rovnat.





Cosinová věta a její zobecnění

Cosinová věta je velmi četným nástrojem pro výpočty údajů v trojúhelníku ve středoškolské matematice. V práci je několikrát využita, pročež ji dokážeme. Dokázáno bude z důvodu zjednodušení diskuzí i její rozšíření pro tři kolineární body.

Tvrzení: V každém trojúhelníku $\triangle ABC$ platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Dokážeme odděleně pro ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník. Pro trojúhelník pravoúhlý je cosinus roven nule, obdržíme tedy Pythagorovu větu dokázanou výše.

Cosinová věta pro ostroúhlý trojúhelník

Sestrojíme výšku na stranu c, patu výšky označíme D. Úhel $\sphericalangle CAB$ označíme α. Pomocí funkce cosinus pravoúhlého trojúhelníka $\triangle ADC$ jsme schopni vyjádřit úsečku AD, úsečku BD poté vyjádříme jako rozdíl $|AB| - |AD|$.

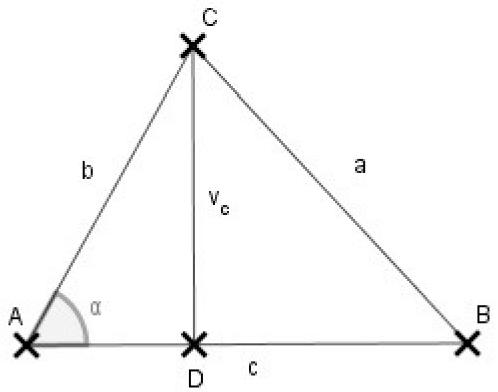
$$\cos \alpha = \frac{|AD|}{b}$$

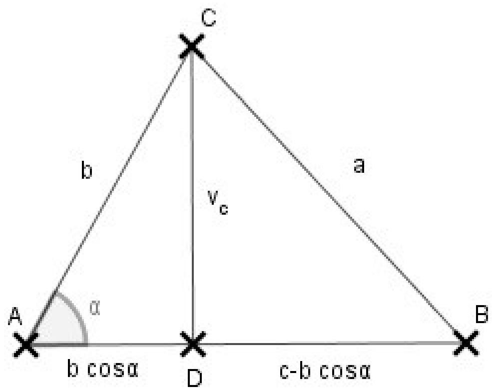
$$|AD| = b \cos \alpha$$

$$|BD| = |AB| - |AD| = c - b \cos \alpha$$

[1] http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/stepan_kurka/pythagorova.htm

Znázorněme výchozí i nově zjištěné informace na obrázku:





Nyní nadvakrát použijeme Pythagorovu větu na trojúhelníky $\triangle ADC$ a $\triangle BDC$:

$$b^2 = v_c^2 + (b\cos\alpha)^2$$

$$a^2 = v_c^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$

Z obou rovnic vyjádříme v_c^2:

$$v_c^2 = b^2 - b^2\cos^2\alpha$$

$$v_c^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

Položíme rovnice do rovnosti a upravíme:

$$b^2 - b^2\cos^2\alpha = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

$$b^2 - b^2\cos^2\alpha = a^2 - (c^2 - 2\,bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2\,bc\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$

Analogicky pro zbylé dvě rovnosti.

Cosinová věta pro tupoúhlý trojúhelník

Postup důkazu pro ostré úhly v tupoúhlém trojúhelníku přímo odpovídá důkazu pro ostroúhlý trojúhelník. Větu proto dokážeme jen pro tupý úhel.

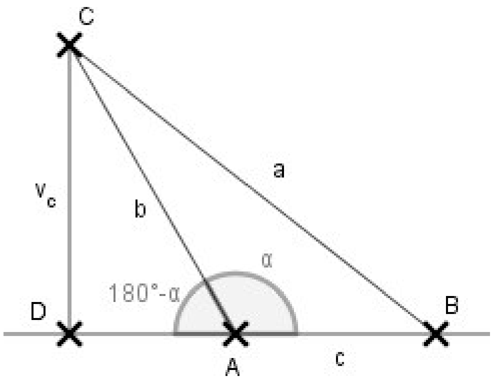
Nechť máme tupý úhel u vrcholu A. Opět sestrojíme výšku na stranu c a použijeme stejné značení. Doplníme ještě úhel $|\sphericalangle CAD| = 180° - \alpha$. Platí

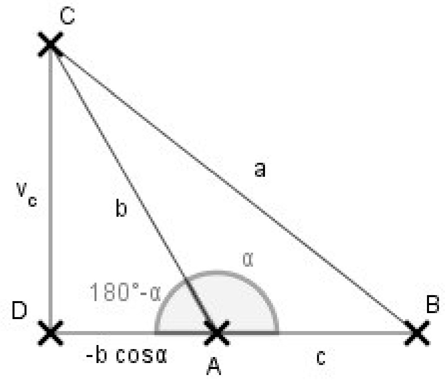
$$\cos(180° - \alpha) = \frac{|AD|}{b}$$

Víme, že $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, po úpravě dostaneme

$$|AD| = -b\cos\alpha$$

$$|BD| = |AB| + |AD| = c - b\cos\alpha$$





Znovu nadvakrát využijeme Pythagorovu větu:

$$b^2 = v_c^2 + (-b\cos\alpha)^2$$

$$a^2 = v_c^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$

Po vyjádření v_c^2 a dosazení dostáváme

$$a^2 - (c - b\cos\alpha)^2 = b^2 - (-b\cos\alpha)^2$$

Po úpravě získáme stejný vztah, který vznikl u důkazu pro ostroúhlý trojúhelník:

$$a^2 - \left(c^2 - 2\,bc\cos\alpha - b^2\cos^2\alpha\right) = b^2 - b^2\cos^2\alpha$$

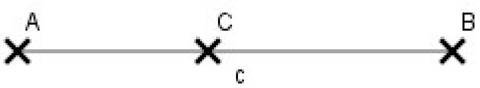
$$a^2 - c^2 + 2\,bc\cos\alpha = b^2$$

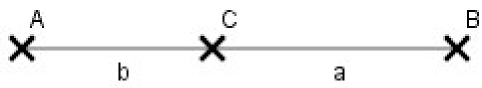
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$

Rozšíření cosinové věty pro tři kolineární body

Vztah vzdáleností mezi třemi body tvořícími trojúhelník je možné zobecnit na libovolné tři body v rovině. Vzhledem k důkazům pro trojúhelníky uvedenými výše schází pouze důkaz pro tři body ležící na přímce.

Pro přehlednost dodržíme značení používané u trojúhelníků. Úsečka $AB = c$, úsečka $BC = a$ a AC je rovna b.





Dokažme první rovnost:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Úhel $\alpha = \sphericalangle CAB$ je roven $0°$, $\cos 0° = 1$, takže platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc = (b - c)^2 = (c - b)^2$$

Z obrázku je ale zřejmé, že úsečka a je rovna rozdílu $c - b$, vztah tedy platí. Zcela analogicky lze provést pro úhel β. Dokažme ještě pro úhel γ, který není roven 0°.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$ je přímý, jeho cosinus je roven -1, dosaďme:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Z obrázku opět snadno pozorujeme, že $c = a + b$.

Kružnice vepsaná a připsaná, středy kružnic vepsané a připsaných

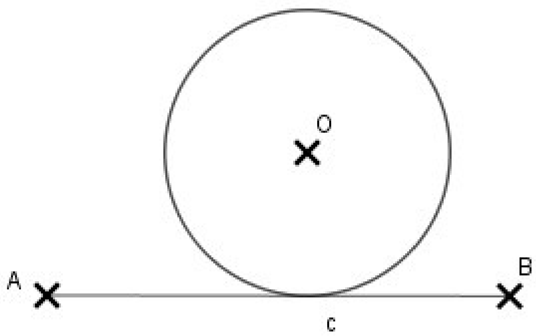
Kružnice vepsaná trojúhelníku $\triangle ABC$ je taková kružnice, která se dotýká každé z přímek $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BC}$ právě v jednom bodě a leží uvnitř trojúhelníka.

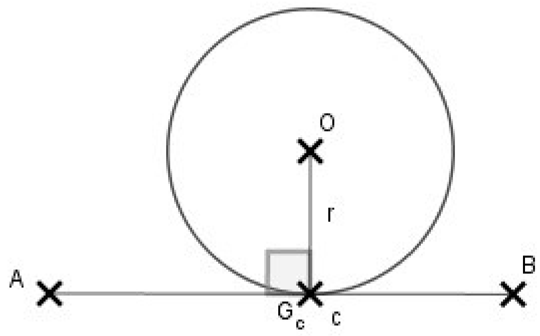
Kružnice připsaná trojúhelníku $\triangle ABC$ je taková kružnice, která se dotýká každé z přímek $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BC}$ právě v jednom bodě a leží vně trojúhelníka.

Zamysleme se nad tím, jaké má vlastnosti kružnice vzhledem k jedné tečně a ke dvěma různoběžným tečnám.

Vlastnosti kružnice vzhledem k jedné její tečně

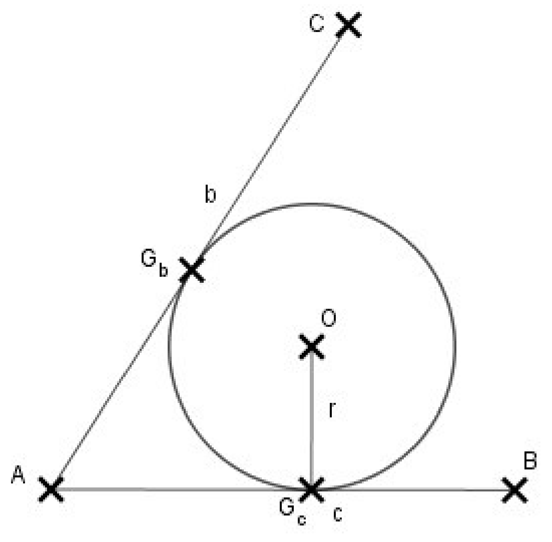
Kružnice se dotýká úsečky v jediném bodě – ten označíme jako G_c. Je důležité si povšimnout, že úsečka OG_c je zároveň poloměrem kružnice. Protože je průsečík jen jeden, činíme další zásadní pozorování – úsečka je zároveň tečnou ke kružnici. To navíc znamená, že úhel $\sphericalangle AG_cO$ je pravý (rovněž platí pro $\sphericalangle BG_cO$).

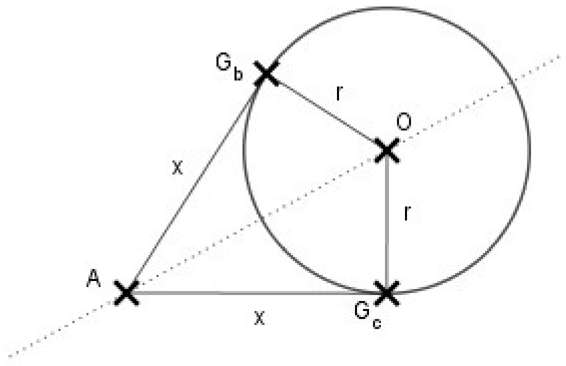




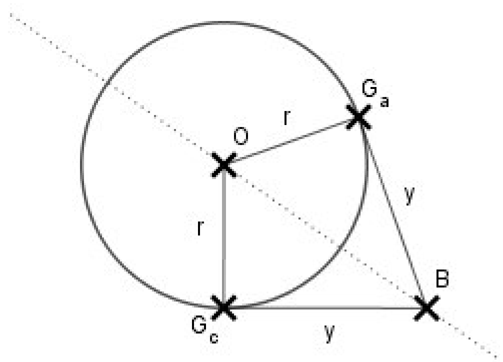
Vlastnosti kružnice vzhledem ke dvěma různoběžným tečnám

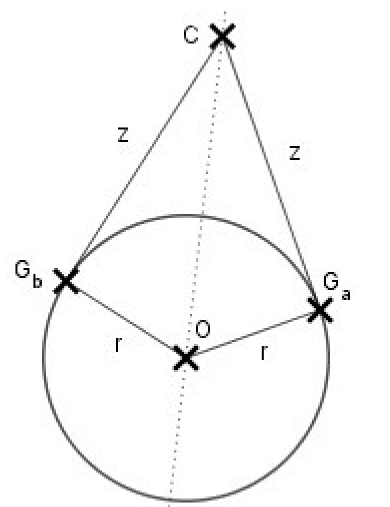
Kružnice se nyní dotýká i druhá úsečka. Spojíme-li opět body O a G_b, je opět vzdálenost $|OG_b|$ poloměr kružnice. Postřeh, který si čtenář může odnést, je, že čtyřúhelník AG_COG_b je osově souměrný podle úhlopříčky AO – to znamená, že krom zřejmé rovnosti poloměrů jsou si rovny i vzdálenosti $|AG_c|$ a $|AG_b|$. Trojúhelník $\triangle AG_bG_c$ je tedy rovnoramenný a přímka $\overleftrightarrow{AO}$ je osou úhlu $\sphericalangle G_bAG_c$.





Znázorněme ještě zbylé dvě osy pro tento konkrétní případ kružnice vepsané:

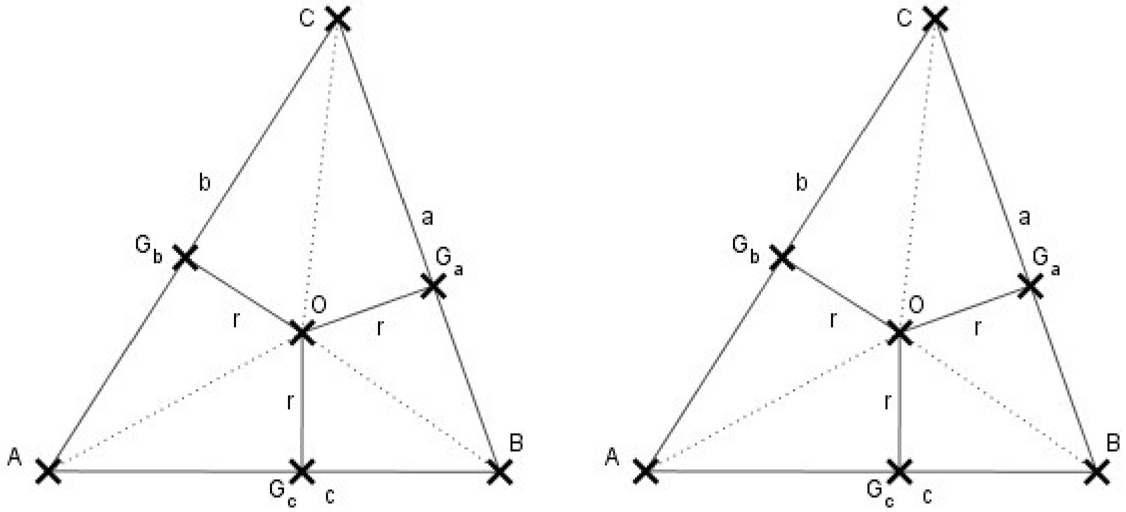




Vztah platí i obráceně – sestrojíme-li kolmice z libovolného bodu osy úhlu na jeho ramena, budou stejně dlouhé. To snadno nahlédneme s využitím stejnolehlosti s libovolným nenulovým koeficientem se středem v bodech A, B nebo C. Tuto skutečnost nyní využijeme v důkazu existence kružnice vepsané a později i v důkazu existence kružnice připsané.

Důkaz existence kružnice vepsané

Znázorněme si celou konstrukci:



Důkaz je díky výše popsané myšlence již snadný:

Bod O leží na osách úhlů $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle CBA$. Ze čtyřúhelníku CG_aOG_b vidíme

$$|G_bO| = |G_aO| = r$$

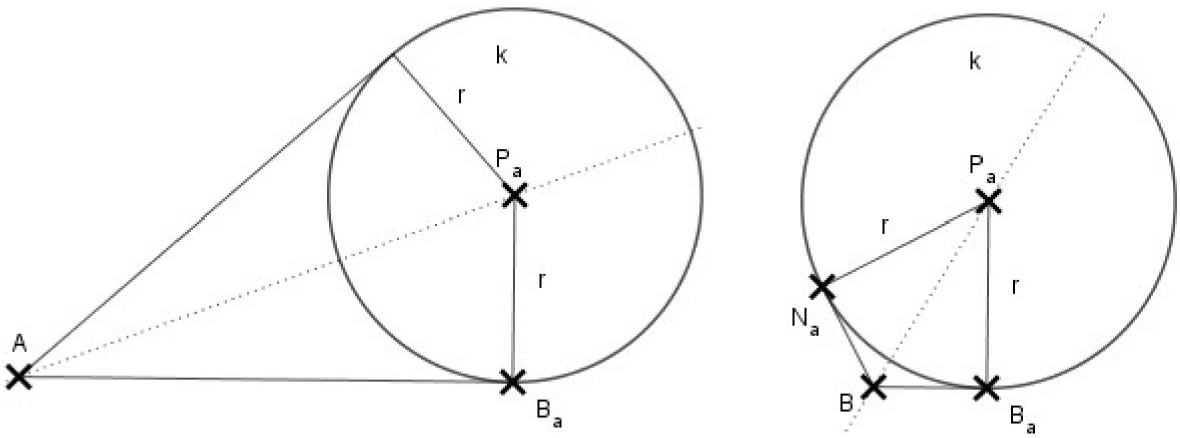
Ze čtyřúhelníku BG_cOG_a vidíme

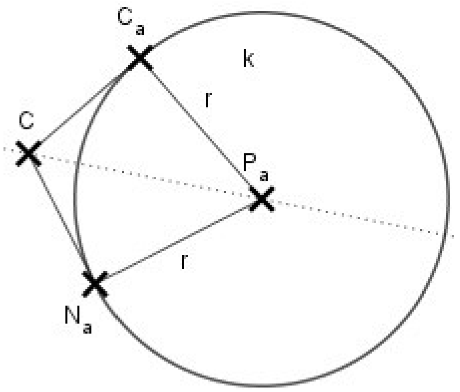
$$|G_cO| = |G_aO| = r$$

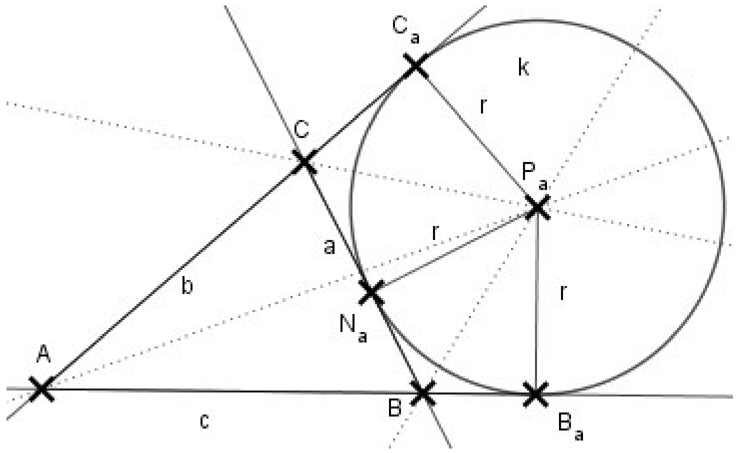
Z rovností vychází i $|G_cO| = |G_bO| = r$, což znamená, že bod O se nachází i na ose úhlu G_bG_c, která prochází bodem A (připomeňme čtyřúhelník AG_cOG_b). Střed kružnice vepsané se tedy nachází na osách vnitřních úhlů trojúhelníka.

Důkaz existence kružnice připsané

Důkaz je velice obdobný důkazu předchozímu. Znázorněme opět jednotlivé fragmenty i celou konstrukci:







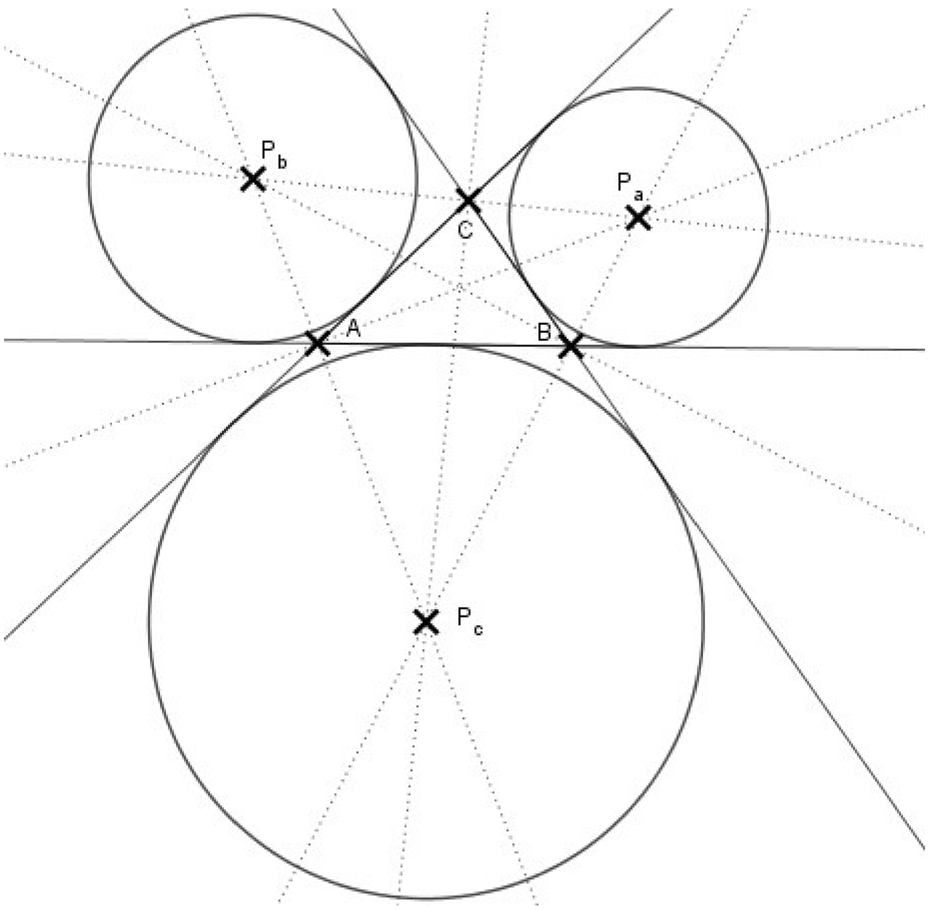
Bod S_a leží na osách úhlů $\sphericalangle B_aBN_a$ i $\sphericalangle C_aCN_a$. Jedná se popořadě o vnější úhly úhlů $\sphericalangle ABC$. Ze čtyřúhelníku $CC_aS_aN_a$ vidíme

$$|S_aN_a| = |C_aS_a| = r$$

Ze čtyřúhelníku $BB_aS_aN_a$ vidíme

$$|B_aS_a| = |S_aN_a| = r$$

Opět dosadíme rovnosti do sebe a získáme $|B_aS_a| = |S_aN_a| = |C_aS_a| = r$. Body S_a i bod A se nacházejí na ose úsečky B_aC_a, která je i osou úhlu $\sphericalangle B_aAC_a$. Stejný postup využijeme i pro zbylé dvě kružnice připsané. Středy kružnic připsaných se tedy nachází vždy na ose jednoho vnitřního úhlu a osách dvou vnějších úhlů.



Rovnosti bodů nevedoucí k řešení

Dříve, než začneme řešit jednotlivé případy konstrukcí, zamysleme se stručně nad některými dvojicemi bodů, které se nesmí rovnat, chceme-li s jejich pomocí trojúhelník konstruovat. Je vhodné si tyto případy vyjasnit předem, protože tím podstatně zestručníme diskuze řešení.

$A \neq B$

Pakliže nastává rovnost dvou vrcholů, můžeme si být jisti, že body A, B, C budou kolineární.

$S_a \neq S_b$

Rovněž se nemohou rovnat středy dvou stran. Strany by se buďto musely protínat ve středech, nebo se překrývat.

$A \neq T$

Pokud by byl vrchol roven těžišti, znamenalo by to, že je roven i středu jemu protější strany. Protější strana má za koncové body zbylé dva vrcholy trojúhelníka – určitě by tedy pak byly tři vrcholy kolineární.

$A \neq S$

Je patrné, že vrchol trojúhelníka nesmí být roven středu kružnice jemu opsané – znamenalo by to, že poloměr této kružnice je nulový, zbylé vrcholy by pak musely být také rovny vrcholu A.

$A \neq O, A \neq P_a, A \neq P_b$

Kružnice vepsaná a kružnice připsané musí mít nenulový poloměr, jinak by všechny tři strany trojúhelníka musely procházet jedním bodem, což není možné.

$G_a \neq G_b$

Rovnost těchto bodů by znamenala, že alespoň dvě z přímek $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AB}$ splývají. Odsud by vzešla kolinearita bodů A, B, C.

$B_a \neq C_a \neq N_a \neq B_a$

Rovnost tečných bodů kružnice připsané by znamenala, že alespoň dvě z přímek $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AB}$ splývají.

$A \neq G_a$

Rovnost těchto bodů by znamenala, že bod A náleží jemu protější straně.

$O \neq G_a$

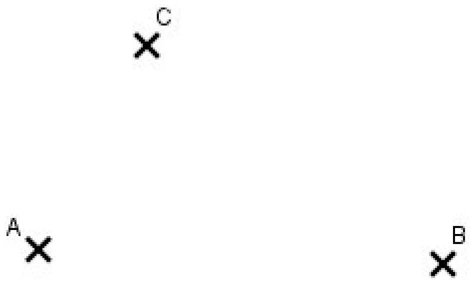
Kružnice vepsaná by měla nulový poloměr.

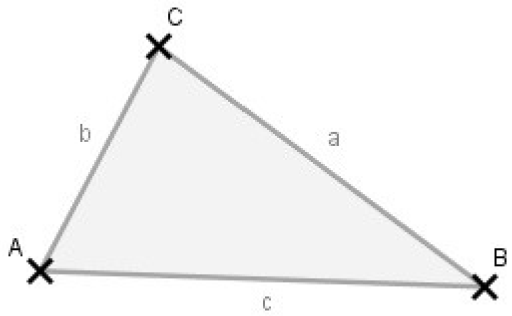
1.Tři vrcholy

Zadání: Sestrojte trojúhelník ABC, máte-li zadané jeho vrcholy.

Řešení:

Jedná se o triviální případ. Spojnice vrcholů samozřejmě tvoří přímo hrany trojúhelníka, bude tedy možné jejich konstrukcí trojúhelník rovnou sestrojit.



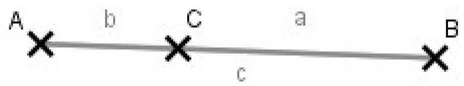


Zápis konstrukce:

0) A, B, C
1) AB
2) BC
3) AC
4) $\triangle ABC$

Diskuze řešení:

Poloha bodů trojúhelníka je daná ze zadání, nemusíme se tedy starat o trojúhelníkovou nerovnost. Problémový případ nastává ve chvíli, kdy všechny tři vrcholy leží na jedné přímce (jsou kolineární). Úsečky se poté překrývají, trojúhelník se degeneruje do úsečky.



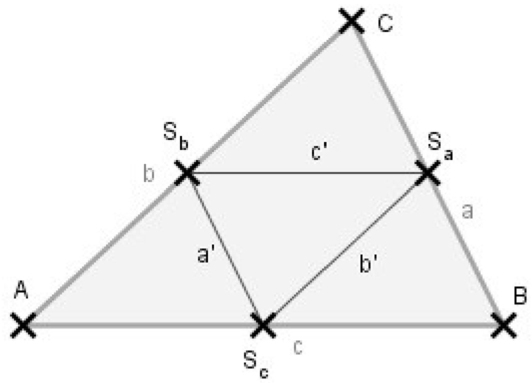
Poznámka: *V práci budou u zápisů konstrukce dále v případě nalezení všech tří vrcholů A, B, C přeskočeny kroky, v nichž jsou sestrojovány jednotlivé úsečky tvořící hrany trojúhelníka – tyto kroky tímto považujeme za zřejmé. Důvodem je zpřehlednění zápisů konstrukce.*

2.Středy tří stran

Zadání: Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li středy jeho stran.

Řešení:

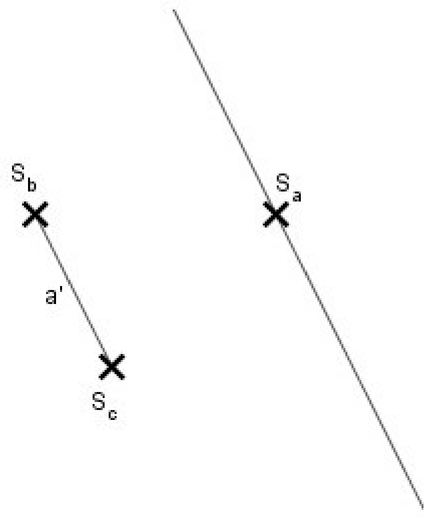
Protože máme zadané všechny tři středy stran, získáme trojúhelník příček se stranami a', b', c', spojíme-li je po dvou úsečkami. Nyní by se mohlo zdát, že není jak pokračovat - pohleďme nejprve na hotový trojúhelník $\triangle ABC$ pro nalezení klíčové myšlenky.

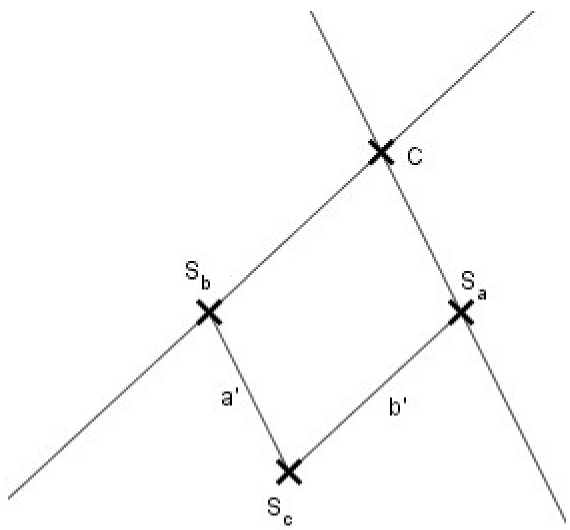


Mohlo by se zdát, že dvojice úseček aa', bb' a cc' jsou rovnoběžné – je tomu skutečně tak?

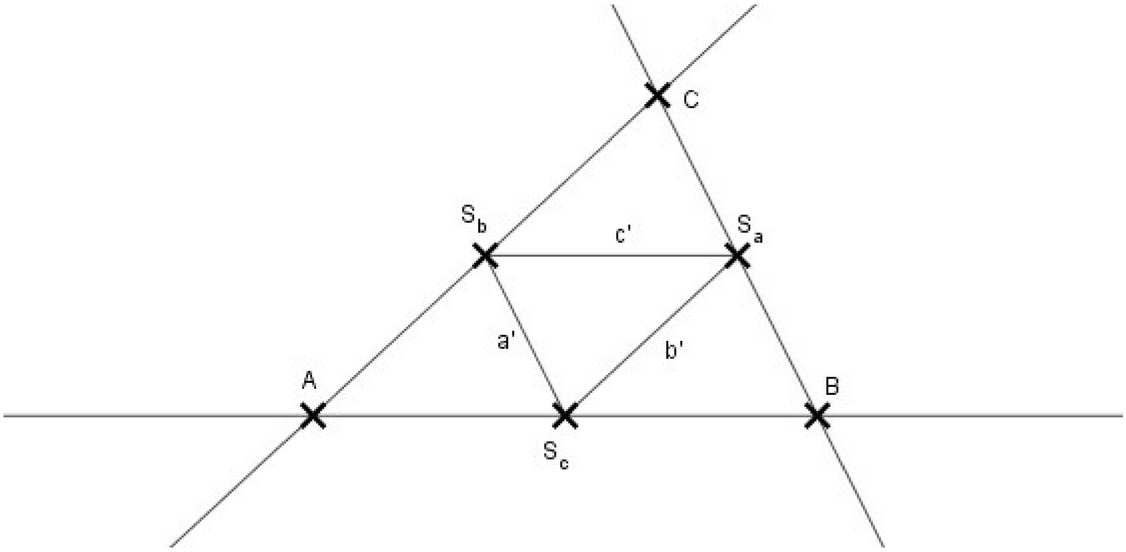
Uvažme stejnolehlost se středem v bodě C a koeficientem 2 – všechny body se od bodu C vzdálí na dvojnásobek. Středy S_b i S_a se zobrazí přímo na vrcholy A a B, strana c' se nám tedy zobrazuje na c. Toto pochopitelně analogicky platí i při stejnolehlostech z bodu A a C. Stejnolehlost zachovává rovnoběžnost, máme tedy odpověď - výše jmenované dvojice úseček rovnoběžné jsou.

Pro úlohu z toho plyne následující – udělejme vždy spojnici dvou zadaných bodů a veďme rovnoběžku tím třetím. Samozřejmě můžeme zvolit libovolné pořadí konstrukce rovnoběžek. Zde na druhém obrázku již máme společný bod přímek $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BC}$ – bod C.





Pro zisk bodů A a B již jen doplníme poslední rovnoběžku.



Zápis konstrukce:

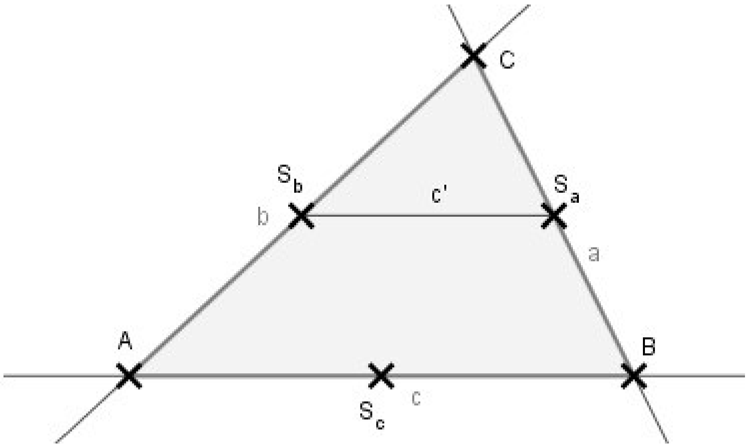
0) S_a, S_b, S_c
1) $\overleftrightarrow{BC};\ S_{\boldsymbol{a}} \in \overleftrightarrow{BC} \wedge \overleftrightarrow{S_b S_c} \parallel \overleftrightarrow{BC}$
2) $\overleftrightarrow{AC};\ S_{\boldsymbol{b}} \in \overleftrightarrow{AC} \wedge \overleftrightarrow{S_{\boldsymbol{a}} S_c} \parallel \overleftrightarrow{AC}$
3) $C; C \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC}$
4) $\overleftrightarrow{AB};\ S_{\boldsymbol{c}} \in \overleftrightarrow{AB} \wedge \overleftrightarrow{S_a S_b} \parallel \overleftrightarrow{AB}$
5) $A; A \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{AB}$
6) $B; B \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BC}$
7) $\triangle ABC$

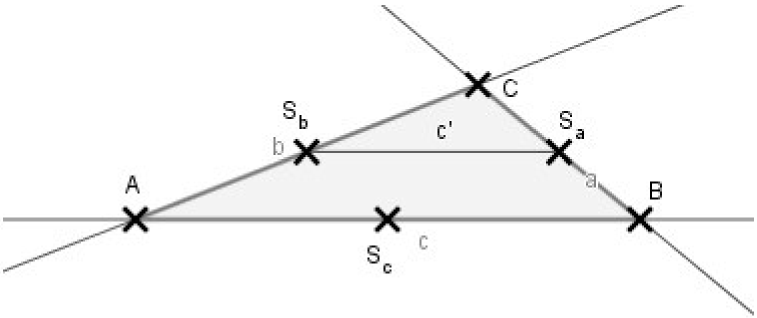
Diskuze řešení:

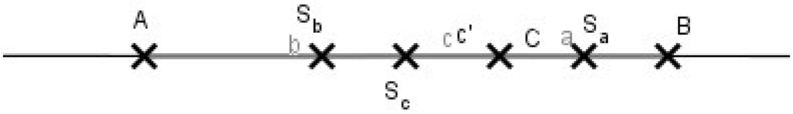
Řešení neexistuje pouze v případě, že zadané středy budou ležet na jedné přímce.
Nabídněme následující dvě odůvodnění:

1) Všechny pokusy o vytvoření rovnoběžek skončí na téže přímce, vrcholy pak nemá smysl hledat – nemohou ležet mimo ni, ze tří kolineárních bodů trojúhelník nevzniká.
2) Je zřejmé, že v každém trojúhelníku lze příčkový trojúhelník nalézt a stejně tak ke každému příčkovému trojúhelníku existuje trojúhelník „původní“. Zde ale příčkový trojúhelník degeneruje na úsečku, původní trojúhelník na ni pak také degeneruje.

Níže uvedené obrázky demonstrují degeneraci trojúhelníka na úsečku. Posouváno je pouze bodem S_c směrem k úsečce c'.







3.Dva vrcholy a těžiště

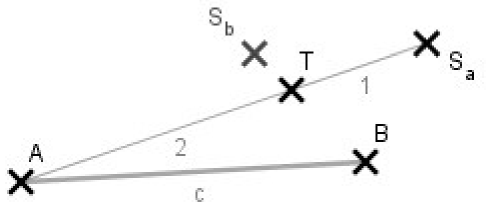
Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, znáte-li polohu jeho vrcholů A, B a těžiště T.

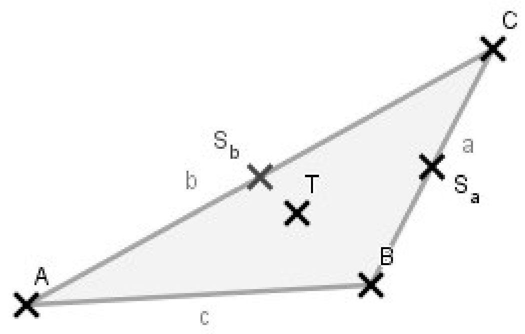
Řešení:

Nabídněme dvě řešení. Obě vyžadují znalost informace, že těžiště trojúhelníka dělí spojnici vrcholu se středem protější strany v poměru dva ku jedné (dva díly mezi vrcholem a těžištěm, jeden mezi těžištěm a středem protější strany).

Řešení 1

Ze zadání a zmíněné vlastnosti těžiště získáváme střed strany a, značen S_a, a střed strany b, značen S_b. Pro nalezení vrcholu C postačí jeden z nich. Známe-li střed strany a jeden její krajní bod, snadno sestrojíme její druhý krajní bod.



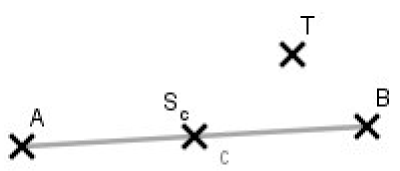


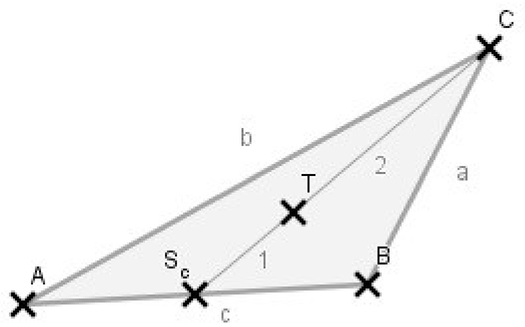
Zápis konstrukce prvního řešení:

0) A, B, T
1) $S_a; H\left(T, -\frac{1}{2}\right): A \to S_a$ *(případně analogicky s* S_b*)*
2) $C; H(B, 2): S_a \to C$
3) $\triangle ABC$

Řešení 2

Nejprve nalezneme střed úsečky $AB = c$, označíme S_c. Vlastnost těžiště využijeme v tomto kroku, úsečka S_cT tvoří třetinu vzdálenosti S_cC (tvoří jeden díl spojnice ze tří celkem).





Zápis konstrukce druhého řešení:

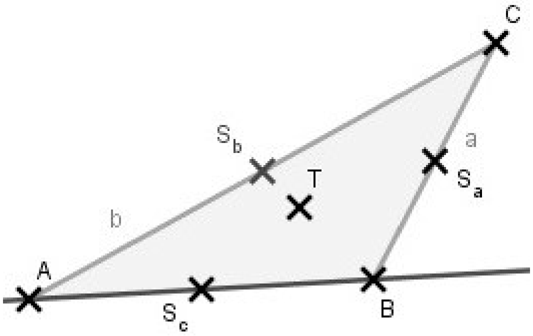
0) A, B, T
1) $S_c; S_c$ je střed AB
2) $C; H(S_c, 3): T \to C$
3) $\triangle ABC$

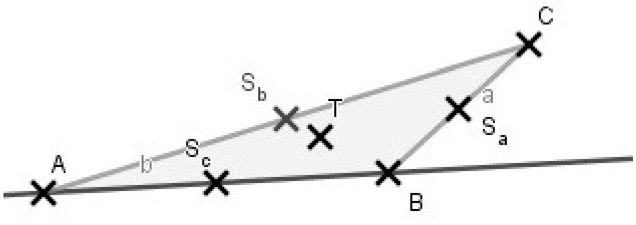
Diskuze řešení:

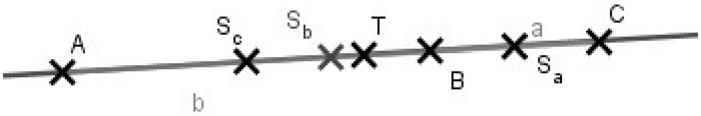
Řešení neexistuje, pakliže body A, B, T jsou kolineární. Nabízíme dvě nahlédnutí, proč:

1) Díváme-li se na trojúhelník jako na konvexní rovinný útvar, je geometricky intuitivní, že se jeho těžiště nemůže nacházet na jeho okraji.
2) Těžiště trojúhelníka je kolineární s vrcholem a středem protější strany (viz konstrukce využitá k řešení). Body A, B, T, S_a, S_b pak jsou všechny kolineární. Bod C se zobrazí opět kolineárně, trojúhelník je degenerován na úsečku.

Degenerace na úsečku budiž demonstrována zde. Posouváno bude pouze bodem T směrem k přímce $\overleftrightarrow{AB}$.







4.Dva vrcholy a ortocentrum

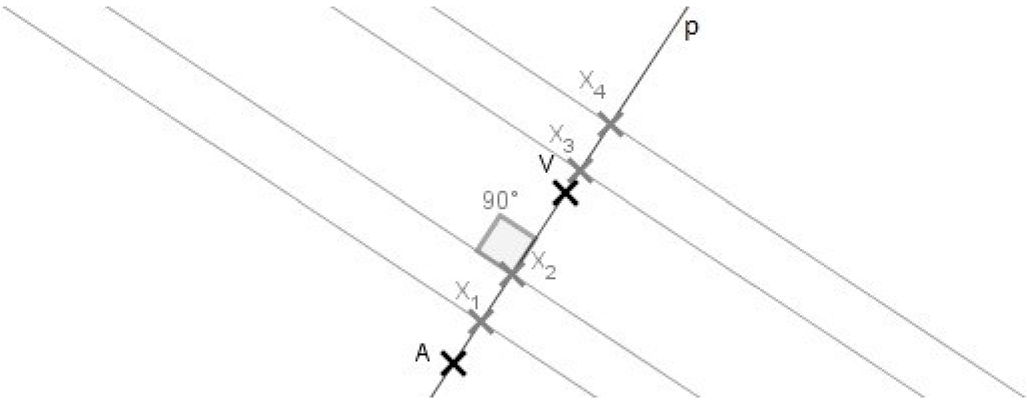
Zadání: Zkonstruujte trojúhelník $\triangle ABC$, znáte-li polohu bodů A, B a ortocentra V.

Řešení:

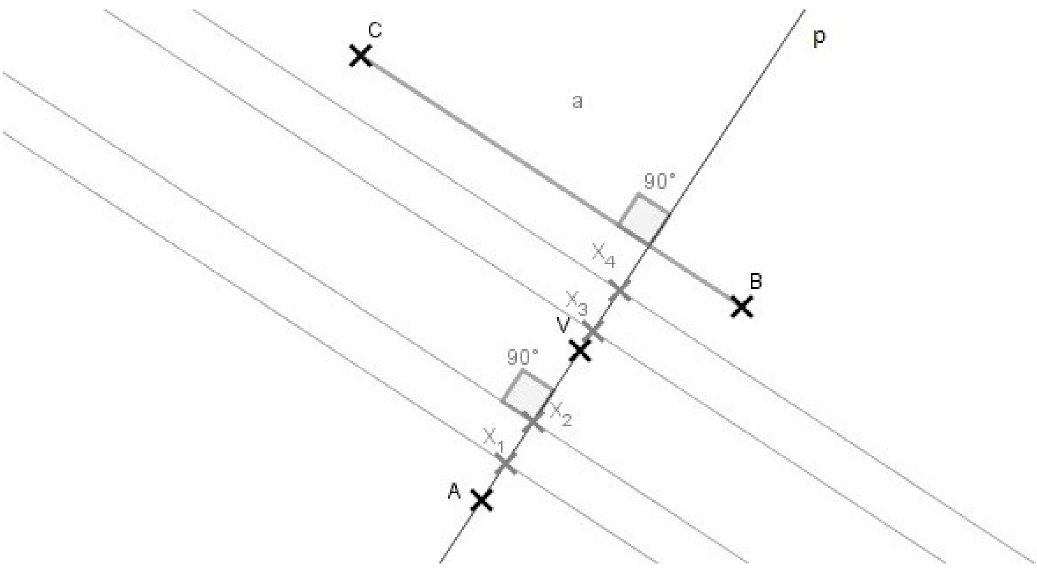
Začněme tím, že sestrojíme přímku $\overleftrightarrow{AV}$. Ta není určena jednoznačně v případě, že $A = V$, tento případ má rovněž řešení, nastává v pravoúhlém trojúhelníku. Případ dvou vrcholů a ortocentra rozdělíme zvlášť na dvě možnosti: 1) oba zadané body jsou různé od ortocentra a 2) jeden ze zadaných bodů je roven ortocentru.

1) Ani jeden zadaný vrchol není roven V

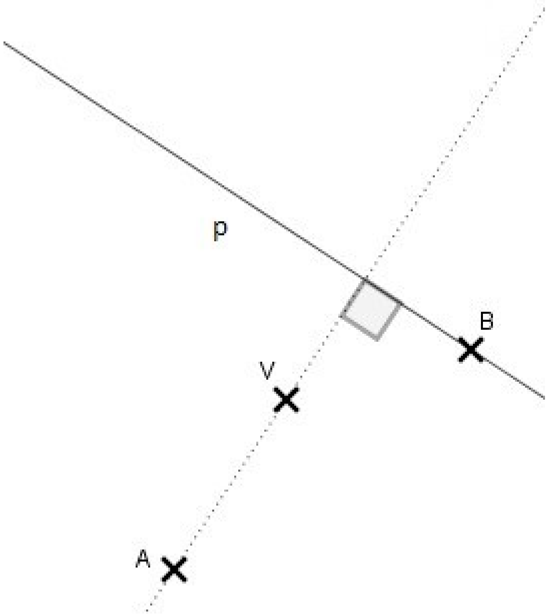
Pohleďme nejprve izolovaně na body A a V. Máme zaručenu jednoznačnost přímky jimi procházející, na obrázcích značena jako p. Zvolíme si na ní body $X_i \neq A$ a z nich budeme sestrojovat kolmice na přímku $\overleftrightarrow{AV}$.

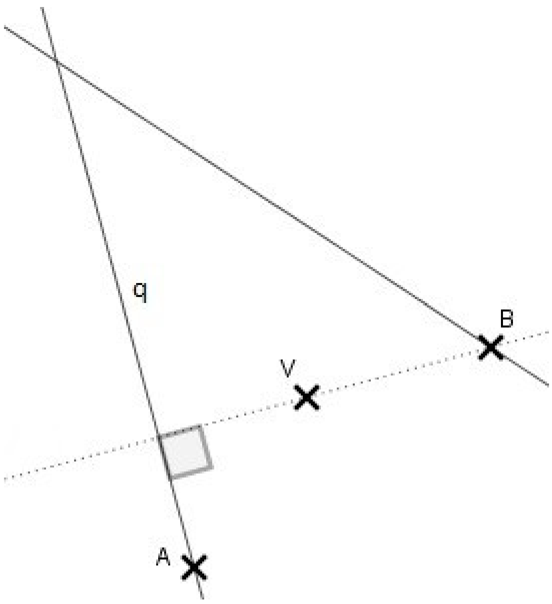


Klíčová myšlenka je, že přímka $\overleftrightarrow{AV}$ představuje výšku na stranu BC. Výška vedená z vrcholu je kolmá na protější stranu, demonstrované přímky procházející body X_i rovněž – jsou tedy s $\overleftrightarrow{BC}$ rovnoběžné. Správná kolmice pro řešení úlohy je pochopitelně ta, která obsahuje bod B.

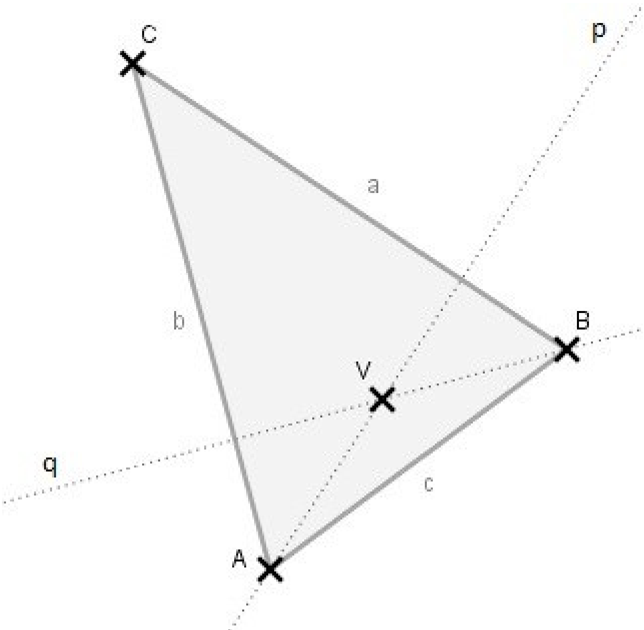


Sestrojme tedy postupně kolmici na $\overleftrightarrow{AV}$ procházející bodem B, značena p, zcela analogicky kolmici na $\overleftrightarrow{BV}$ procházející bodem A, značena q.





Přímky p a q jsou různoběžné, pokud body A, B, V nejsou kolineární – to bude probráno dále v diskuzi. Společným průnikem přímek je bod C.



Zápis konstrukce:

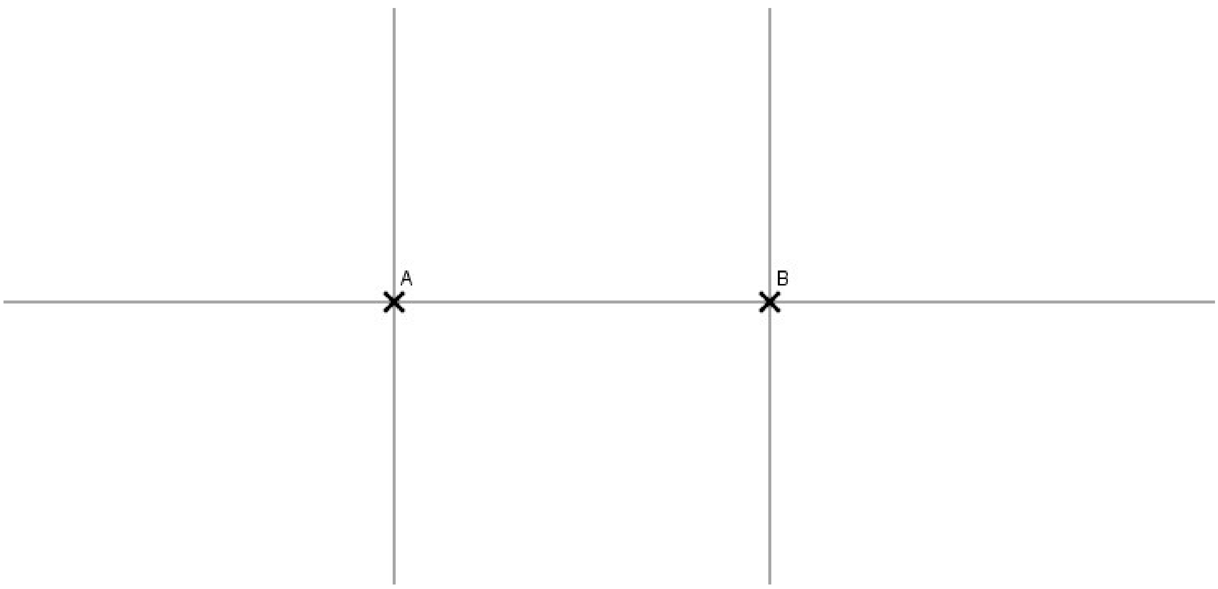
0) A, B, V
1) $\overleftrightarrow{AV}$
2) $p; B \in p \wedge p \perp \overleftrightarrow{AV}$
3) $\overleftrightarrow{BV}$
4) $q; A \in q \wedge q \perp \overleftrightarrow{BV}$
5) $C; C \in \ p \cap q$

Diskuze řešení 1):

Konstrukce přímek $\overleftrightarrow{AV}$ a $\overleftrightarrow{BV}$ je vždy možná. Tyto přímky splývají v případě, že A, B, V jsou kolineární. V takovém případě následné kolmice (body 2 a 4 v zápisu konstrukce) vyjdou rovnoběžně – nedostaneme tak vrchol C (připomeňme, že teď řešíme případ, kdy ortocentrum nesplývá se žádným ze zadaných bodů).

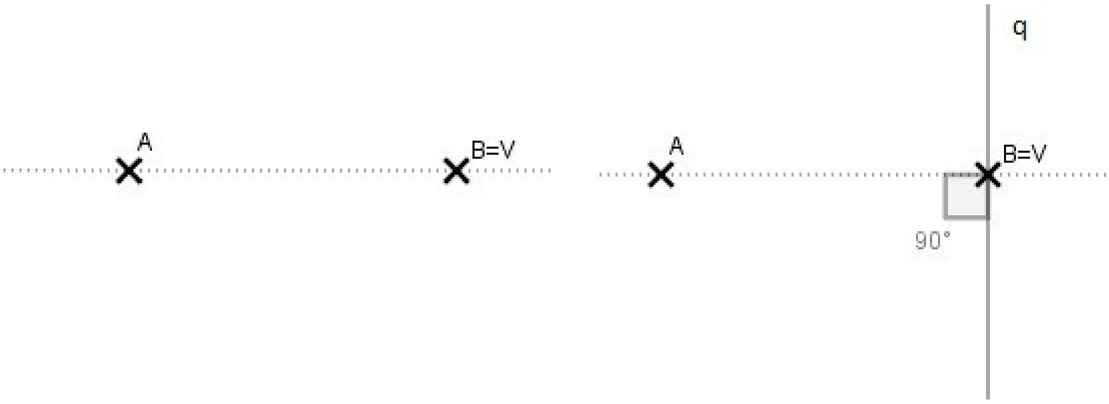
Sestrojení kolmic (body 2 a 4 v zápisu konstrukce) rovněž není bezproblémové, tvoří-li A, B, V pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při zadaném vrcholu. Jedna z kolmic sestrojených v bodech 2 a 4 zápisu konstrukce splývá s přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ – bod C tak vyjde kolineárně s A, B a řešení nebude existovat. Jinými slovy, sestrojíme-li kolmice na úsečku AB v bodě A a v bodě B, ortocentrum V nesmí ležet ani na jedné z nich (opět bereme v potaz $A \neq V, B \neq V$).

Znázorněme problémové přímky na obrázku:



2) Jeden ze zadaných vrcholů je roven V

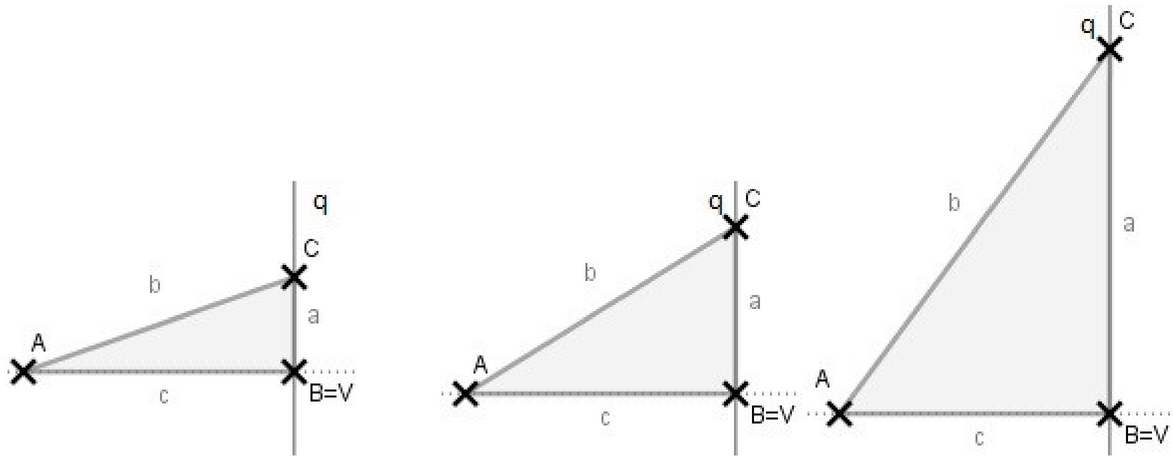
Zvolme $B = V$ ($A = V$ je jen otázka přeznačení vrcholů, nedochází k újmě na obecnosti). Opět sestrojíme přímku $\overleftrightarrow{AV}$ a povedeme kolmici procházející bodem B, označíme q.



Tímto tedy máme sestrojenou přímku, na které se někde nachází bod C. V bodě 1) jsme následně sestrojili kolmici na $\overleftrightarrow{BV}$ a pátrali po bodě C na průniku těchto dvou přímek. Co tady? Zkusíme-li obdobný postup, máme pouze jeden bod, o který je přímka zachycena. Znamená to, že můžeme druhou přímku, ze které povedeme kolmici na A, libovolně natočit?

Téměř ano. Výjimku tvoří dvě přímky – jedná se přesně o dvě dosud zkonstruované přímky $\overleftrightarrow{AV}$ a $\overleftrightarrow{BC}$.

Jednotlivé body C vycházejí po celé přímce q vyjma bodu B, kde by vznikly tři kolineární vrcholy a trojúhelník by nebyl vytvořen. Na následujících obrázcích znázorněme některá řešení. Protože je strana a součástí kolmice na stranu $AB = c$, vznikají pravoúhlé trojúhelníky.



Zápis konstrukce:

0) $A, B, V; B = V$
1) $\overleftrightarrow{AV}$
2) $q; B \in q \wedge q \perp \overleftrightarrow{AV}$
3) $C; C \in q \wedge C \neq B$
4) $\triangle ABC$

Diskuze řešení 2):

Spojnici bodů AB i kolmici, na které budeme hledat bod C, je zde možné sestrojit vždy. Celá kolmice vyjma zadaného bodu, který se na ní nachází, vede k sestrojení trojúhelníku $\triangle ABC$, řešení je tedy nekonečně mnoho. Všechna řešení budou pravoúhlé trojúhelníky.

5.Vrchol, ortocentrum a těžiště

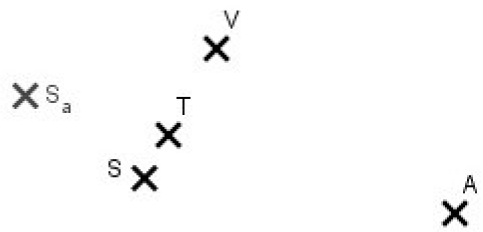
Zadání: Sestrojte trojúhelník ABC, je-li zadán vrchol A, ortocentrum V a těžiště T.

Řešení:

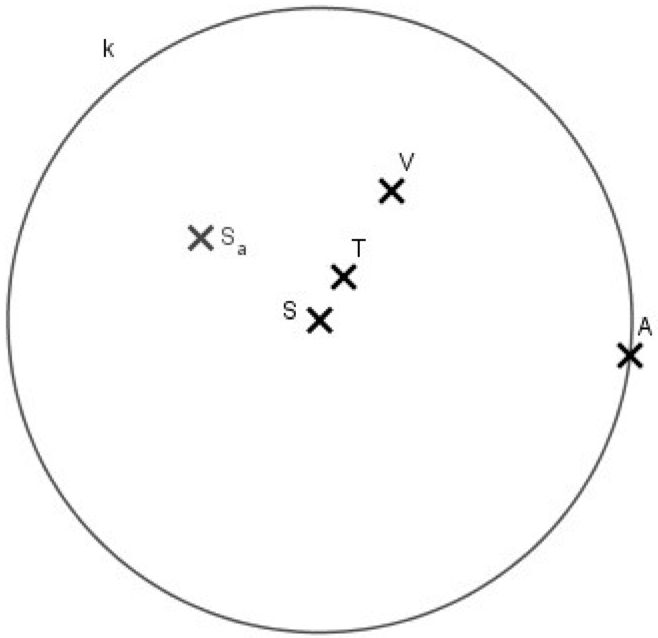
Podobně jako v případě dvou vrcholů a ortocentra i zde budeme chtít konstruovat přímku $\overleftrightarrow{AV}$. Případy $A = V$ i $A \neq V$ mají oba řešení, rozdělme tedy řešení na tyto dvě situace.

1) Vrchol A není roven ortocentru V

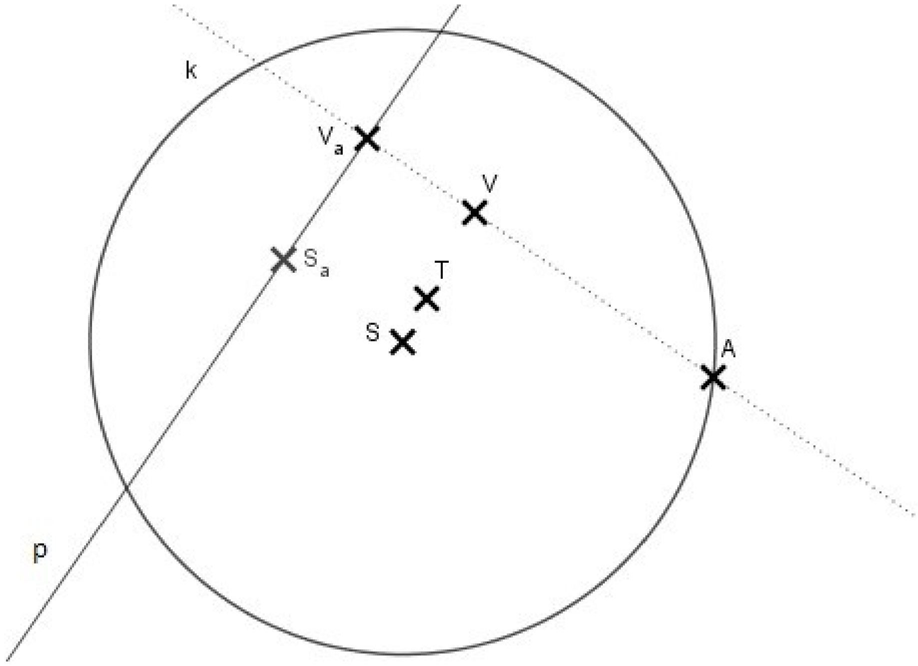
Známe polohu jednoho z vrcholů a těžiště, jsme tak schopni sestrojit střed protější strany, zde tedy S_a. Ten se bude nacházet na přímce $\overleftrightarrow{AT}$, ovšem mimo úsečku AT a vzdálenost $|S_aT|$ bude poloviční oproti $|AT|$. Jinými slovy, půjde o stejnolehlost se středem v bodě T s koeficientem $-\frac{1}{2}$, pomocí níž zobrazíme bod A na bod S_a. Protože máme zadáno ortocentrum i těžiště, jsme schopni sestrojit střed kužnice opsané. Využijeme obdobný postup – stejnolehlost s koeficientem $-\frac{1}{2}$ se středem v T převádí ortocentrum na střed kružnice opsané.



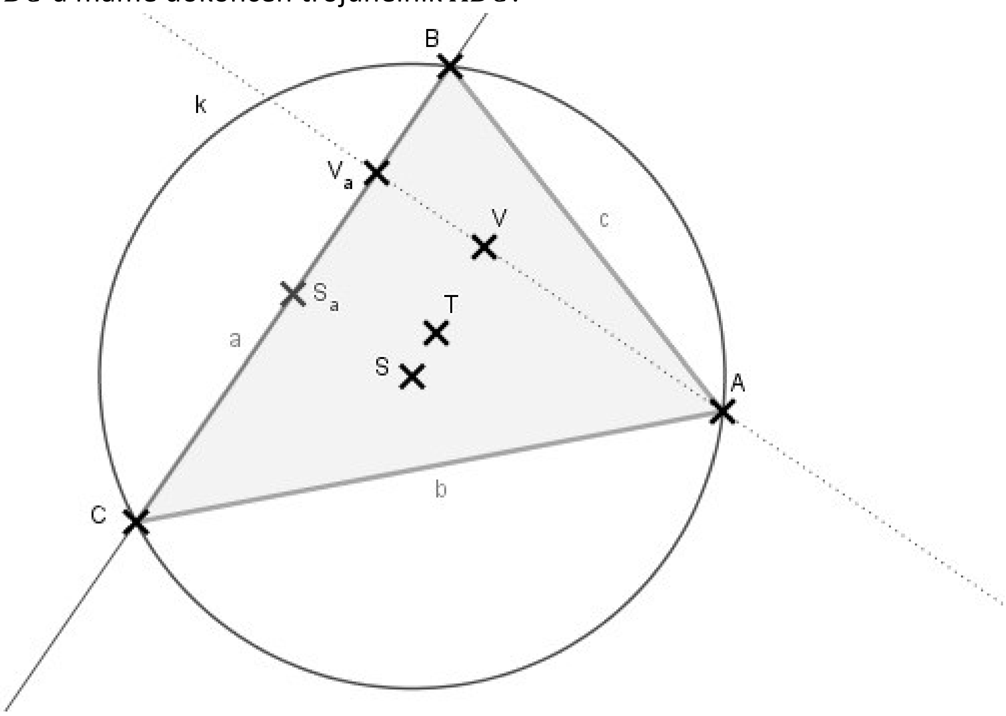
Dále můžeme sestrojit kružnici opsanou. Máme její střed a vrchol A nám dává poloměr $|SA|$. Na ní budeme později hledat zbylé dva vrcholy trojúhelníka.



Klíčová myšlenka přichází v tomto kroku. K nalezení vrcholů B a C napomůže lokace ortocentra. Sestrojíme přímku $\overleftrightarrow{AV}$ (předpokládáme $A \neq V$, čili můžeme). Známe střed strany a a víme, že přímka $\overleftrightarrow{AV}$ je na ni kolmá. Vedením kolmice z bodu S_a na přímku $\overleftrightarrow{AV}$ obdržíme přímku, na níž úsečka a leží. Tuto kolmici označíme p. Průsečík těchto dvou přímek je pata kolmice na a, značena V_a.



Přímka $\overleftrightarrow{V_aS_a}$ protíná kružnici k ve dvou bodech, kterými jsou vrcholy B a C. Postačí sestrojit úsečky AC a BC a máme dokončen trojúhelník ABC.

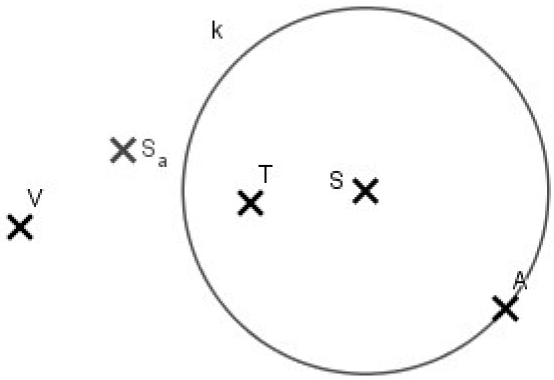


Zápis konstrukce:

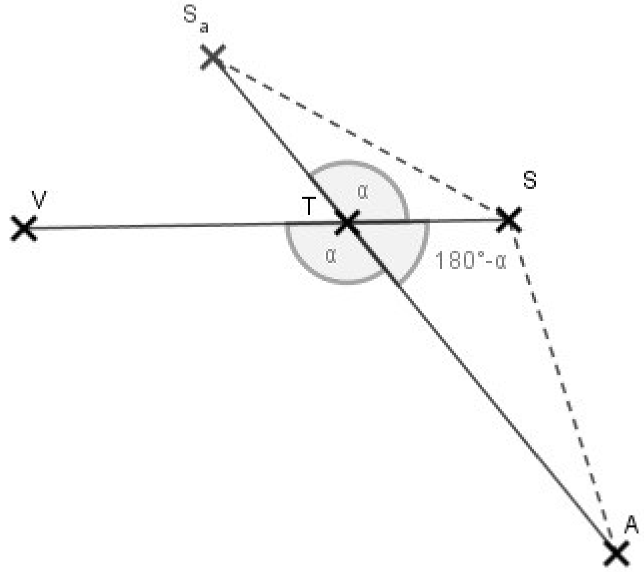
0) A, V, T
1) $S_a;\ H\left(T, -\frac{1}{2}\right):\ A \rightarrow S_a$
2) $S; H\left(T, -\frac{1}{2}\right): V \rightarrow S$
3) $k; k(S; |SA|)$
4) $\overleftrightarrow{AV}$
5) $p; S_a \in p \wedge p \perp \overleftrightarrow{AV}$
6) $V_{a;} V_a \in \overleftrightarrow{AV} \wedge \overleftrightarrow{V_a S_a} \perp \overleftrightarrow{AV}$
7) $B, C; B, C \in k \cap \overleftrightarrow{V_a S_a}$
8) $\triangle ABC$

Diskuze řešení 1):

Řešení nemusí existovat. Jedním z případů, kdy není možné trojúhelník sestrojit, je, když bod S_a leží mimo kruh vymezený kružnicí k nebo na jeho hranici, tedy $|S_aS| \geq |AS|$. Není totiž možné, aby se střed úsečky nacházel mimo kružnici, na které leží body této úsečky. Případ vypadá například následovně:



Prozkoumejme, jak tato situace vypadá, interpretujeme-li ji pomocí údajů ze zadání. Dokresleme úsečky AS_a, AS, SV a S_aS. Zadefinujeme si úhel $\alpha = \sphericalangle ATV$.



Vznikly trojúhelníky $\varDelta AST$ a $\varDelta S_aST$. Z cosinové věty můžeme vyjádřit

$$|S_aS|^2 = |S_aT|^2 + |ST|^2 - 2|S_aT||ST|\cos\alpha$$

$$|AS|^2 = |AT|^2 + |ST|^2 - 2|AT||ST|\cos(180° - \alpha)$$

$$|S_aS| = \sqrt{|S_aT|^2 + |ST|^2 - 2|S_aT||ST|\cos\alpha}$$

$$|AS| = \sqrt{|AT|^2 + |ST|^2 - 2|AT||ST|\cos(180° - \alpha)}$$

A protože chceme, aby $|S_aS|$ bylo menší než $|AS|$, musí platit

$$\sqrt{|S_aT|^2 + |ST|^2 - 2|S_aT||ST|\cos\alpha} < \sqrt{|AT|^2 + |ST|^2 - 2|AT||ST|\cos(180° - \alpha)}$$

$$|S_aT|^2 + |ST|^2 - 2|S_aT||ST|\cos\alpha < |AT|^2 + |ST|^2 - 2|AT||ST|\cos(180° - \alpha)$$

$$|S_aT|^2 - 2|S_aT||ST|\cos\alpha < |AT|^2 - 2|AT||ST|\cos(180° - \alpha)$$

V tomto bodě můžeme jednoduše přepsat podmínku pomocí známých údajů:

$$|S_aT| = \frac{1}{2}|AT|$$

$$|ST| = \frac{1}{2}|VT|$$

$$(\frac{1}{2}|AT|)^2 - 2\frac{1}{2}|AT|\frac{1}{2}|VT|\cos\alpha < |AT|^2 - 2|AT|(\frac{1}{2}|VT|)\cos(180° - \alpha)$$

Vydělíme obě strany $|AT|$ a zjednodušíme:

$$\frac{1}{4}|AT| - \frac{1}{2}|VT|\cos\alpha < |AT| - |VT|\cos(180° - \alpha)$$

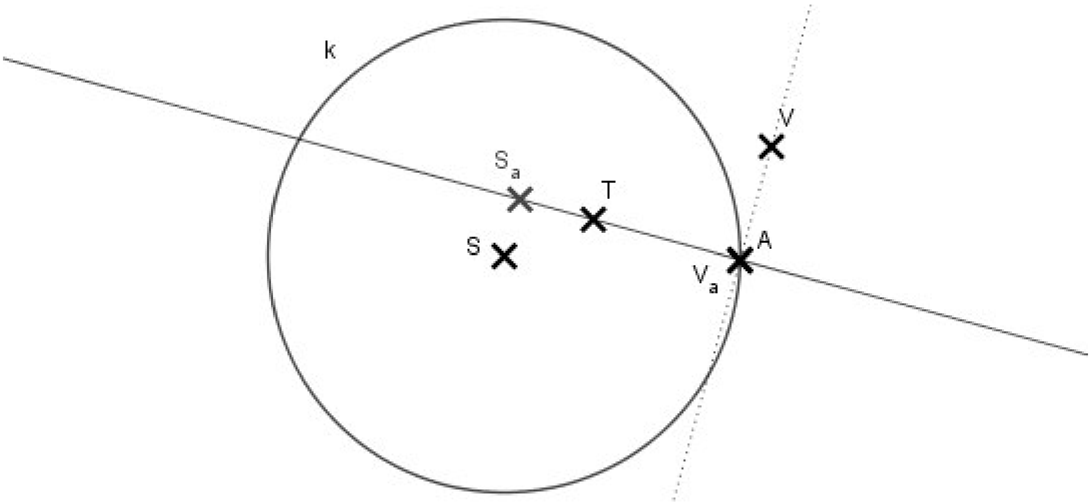
$$|VT|\cos(180° - \alpha) - \frac{1}{2}|VT|\cos\alpha < \frac{3}{4}|AT|$$

Protože $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, platí

$$-\frac{3}{2}|VT|\cos\alpha < \frac{3}{4}|AT|$$

$$-|VT|\cos\alpha < \frac{1}{2}|AT|$$

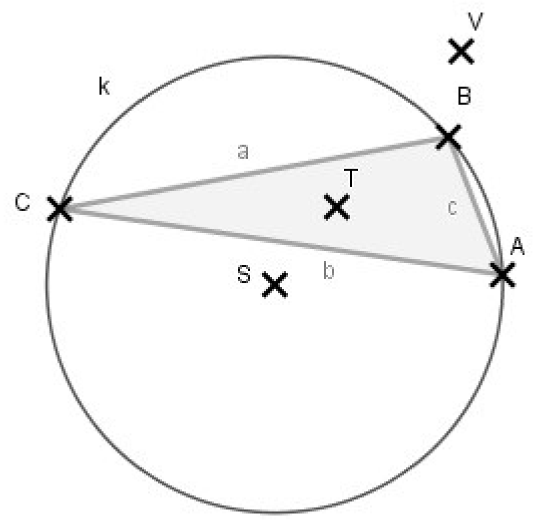
Další situací, kdy nebude možné trojúhelník sestrojit, je kolmost přímek $\overleftrightarrow{AV}$ a $\overleftrightarrow{AT}$. Při konstrukci bodu V_a totiž nastane, že splyne s bodem A. V pátém bodě zápisu konstrukce chceme sestrojit kolmici z přímky $\overleftrightarrow{AV}$ tak, aby procházela bodem S_a. Bod S_a náleží přímce $\overleftrightarrow{AT}$, která je ale v tomto speciálním případě sama o sobě kolmicí na $\overleftrightarrow{AV}$. Nastává rovnost bodů $A = V_a$.

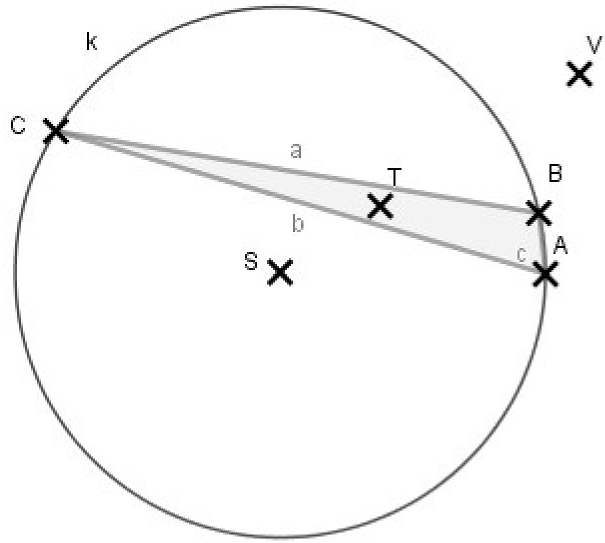


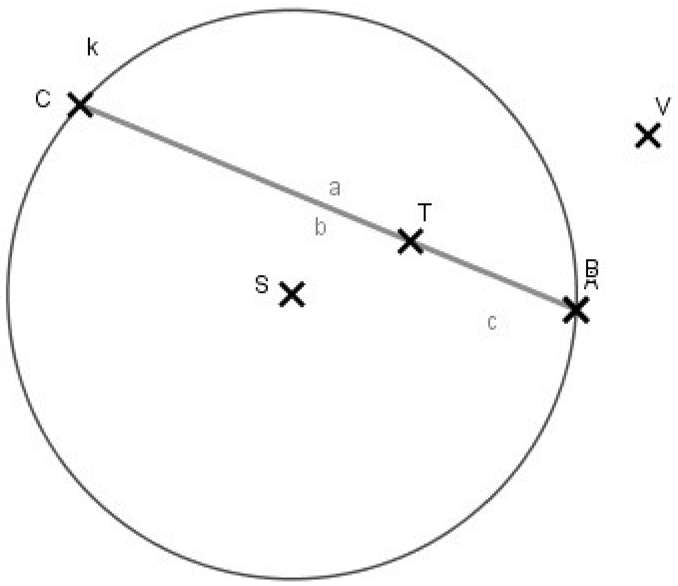
Nabídněme dvě odůvodnění, proč toto nevede k řešení:

1) Není možné, aby pata výšky vedená z vrcholu trojúhelníka byla rovna témuž vrcholu.
2) Průnik kružnice opsané k a přímky $\overleftrightarrow{V_aS_a}$ vyústí v konstrukci tří kolineárních bodů A, B, C, které trojúhelník nemohou tvořit.

Následující obrázky znázorňují degeneraci trojúhelníka na úsečku. Posouváno je pouze bodem V, dokud nenastane kolmost $\overleftrightarrow{AT}$ a $\overleftrightarrow{AV}$.

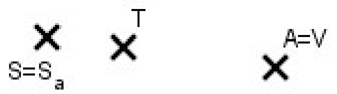


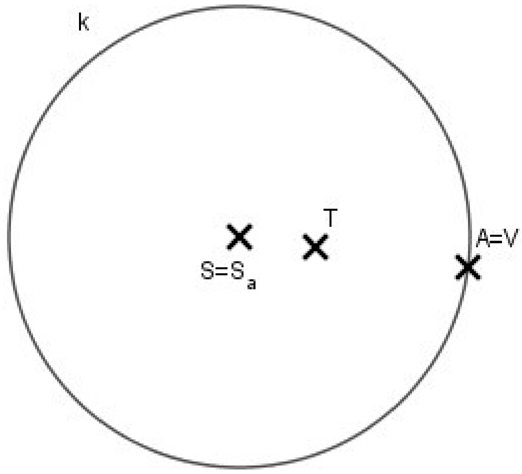




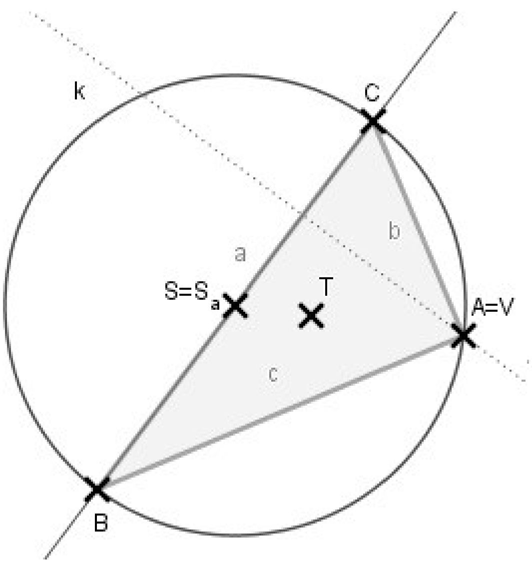
2) Vrchol A je roven ortocentru V

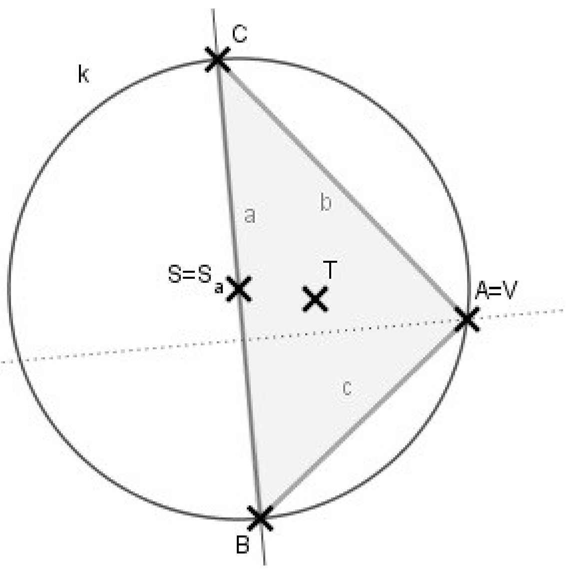
Podobně jako u bodu 1) můžeme získat polohu středu kružnice opsané i středu protější strany. Provedeme stejnolehlost s koeficientem $-\frac{1}{2}$ se středem v těžišti. Bod A se zobrazil na S_a, bod V se zobrazil na S. Protože se ale $A = V$ a koeficient stejnolehlostí je tentýž, tak se i $S_a = S$. Sestrojíme ještě kružnici opsanou.



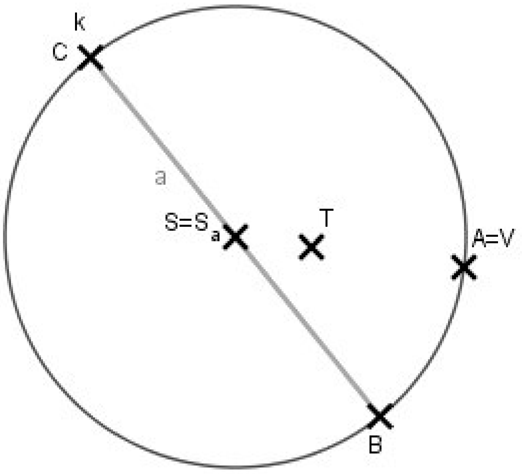


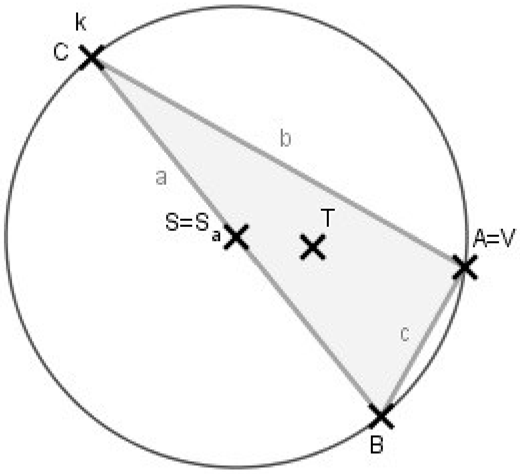
Na kružnici opsané chceme najít body B a C. V bodě 1) jsme sestrojovali stranu BC jako kolmici na $\overleftrightarrow{AV}$ provedenou bodem S_a. Zde není poloha této přímky pevně dána – můžeme si ji různě natáčet a budou vycházet různá řešení. Nepřípustná je akorát poloha přímky taková, že tečuje kružnici – analogicky k případu 1), kde nebylo možné $\overleftrightarrow{AV} \perp \overleftrightarrow{AT}$.





Existuje ale ještě jiný náhled. Střed strany a máme přímo uprostřed kružnice – zvolíme-li si dva libovolné protilehlé body na kružnici, S_a bude středem úsečky, která je spojuje. Jediné, čemu se musíme vyvarovat, je taková volba bodů, že jeden z nich je roven A.





Zápis konstrukce:

0) $A, V, T;\ A = V$
1) $S_a = S;\ H\left(T, -\frac{1}{2}\right):\ A \to S_a$
2) $k; k(S; |SA|)$
3) $B; B \in k\ \wedge B \notin \overleftrightarrow{AS}$
4) $C; C \in \overleftrightarrow{BS} \cap k\ \wedge\ C \neq B$
5) $\triangle ABC$

Diskuze řešení 2):

Střed kružnice opsané je možné sestrojit vždy a vždy bude roven středu strany a. Vždy získáme pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu A. Strana BC bude průměrem kružnice k, kružnici pak můžeme chápat jako Thaletovu kružnici nad úsečkou BC. Jediná situace nevedoucí k řešení je, když výšku na stranu BC volíme kolmo na $\overleftrightarrow{AT}$. Řešení pro zadané $A = V$ a T je nekonečně mnoho.

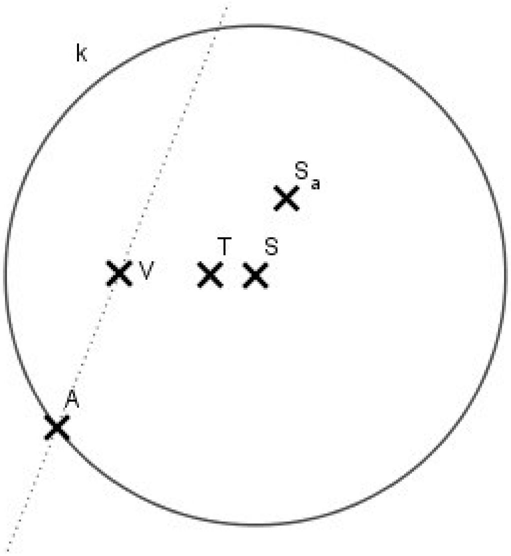
6.Vrchol, ortocentrum a střed kružnice opsané

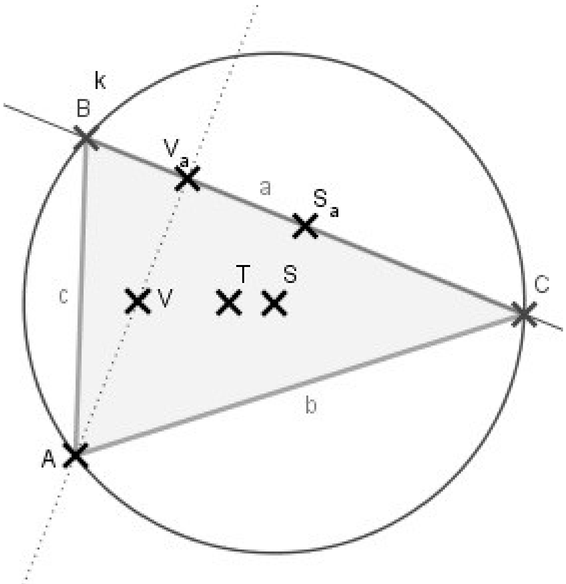
Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, znáte-li umístění vrcholu A, ortocentra V a středu kružnice opsané S.

Řešení:

Ze vzájemné polohy bodů V a S jsme schopni určit polohu těžiště. Tím se dostáváme na předchozí případ zadaných bodů A, V, T, kde jsme hledali střed kružnice opsané. Zápis konstrukce a diskuze budou tedy obdobné.

1) Vrchol A není roven ortocentru V



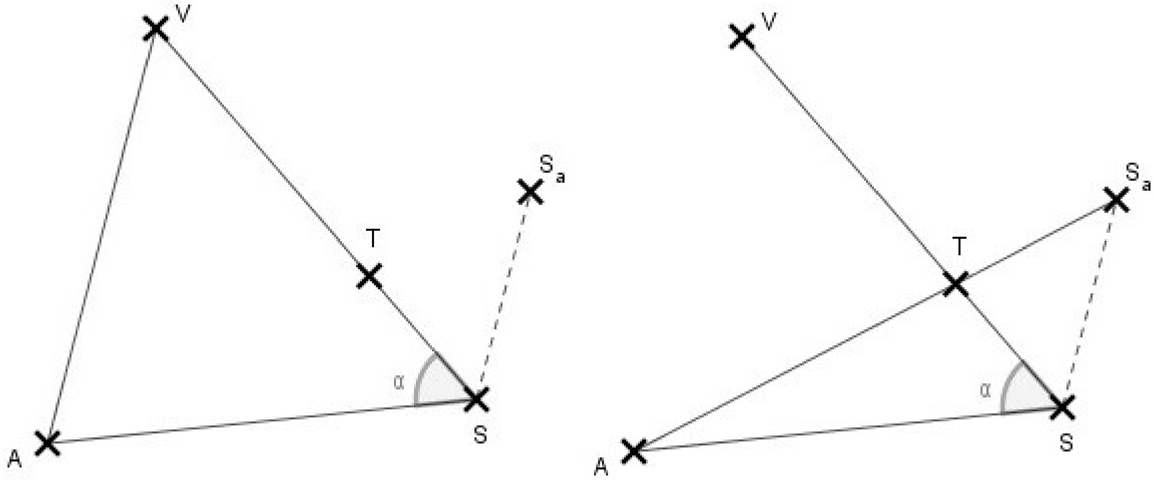


Zápis konstrukce:

0) A, V, S
1) $T; H\left(S, \frac{1}{3}\right): V \rightarrow T$
2) $S_a;\ H\left(T, -\frac{1}{2}\right):\ A \rightarrow S_a$
3) $k; k(S; |SA|)$
4) $\overleftrightarrow{AV}$
5) $V_{a;} V_a \in \overleftrightarrow{AV} \wedge \overleftrightarrow{V_a S_a} \perp \overleftrightarrow{AV}$
6) $\overleftrightarrow{V_a S_a}$
7) $B, C; B, C \in k \cap \overleftrightarrow{V_a S_a}$
8) $\triangle ABC$

Diskuze řešení 1):

Chceme zaručit, aby se střed S_a strany a nacházel uvnitř kružnice opsané, protože jinak trojúhelník nemůže vzniknout. Musí tedy platit $|S_aS| < |AS|$. Na rozdíl od předchozího případu máme k dispozici jiné vzdálenosti. Vzdálenost $|AS|$ známe ze zadání, potřebujeme tedy získat pouze vzdálenost $|S_aS|$. Zadefinujme úhel $\alpha = \sphericalangle ASV$.



Poloha bodu S_a závisí na umístění těžiště, poloha těžiště ale závisí na poloze ortocentra. S jistotou víme, že $|ST| = \frac{1}{3}|SV|$. Pomocí cosinové věty pro trojúhelník $\triangle AST$ dokážeme určit vzdálenost $|AT|$.

$$|AT|^2 = |AS|^2 + \left(\frac{1}{3}|SV|\right)^2 - 2|AS|\frac{1}{3}|SV|\cos\alpha$$

$$|AT| = \sqrt{|AS|^2 + (\frac{1}{3}|SV|)^2 - 2|AS|\frac{1}{3}|SV|\cos\alpha}$$

Těžiště dělí těžnici v poměru 2: 1, vzdálenost $|AT|$ tvoří dvě třetiny vzdálenosti $|AS_a|$.

$$|AT| = \frac{2}{3}|AS_a|$$

$$|AS_a| = \frac{3}{2}\sqrt{|AS|^2 + (\frac{1}{3}|SV|)^2 - 2|AS|\frac{1}{3}|SV|\cos\alpha}$$

Spočtěme hodnotu $\cos(\sphericalangle SAT)$. Ani jedna ze vzdáleností $|AT|$ a $|AS|$ není rovna nule, můžeme bez obav dělit:

$$|ST|^2 = |AT|^2 + |AS|^2 - 2|AT||AS|\cos(\sphericalangle SAT)$$

$$2|AT||AS|\cos(\sphericalangle SAT) = |AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2$$

$$\cos(\sphericalangle SAT) = \frac{|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2}{2|AT||AS|}$$

Vzdálenost $|S_aS|$ budeme chtít získat z cosinové věty, tentokrát pro trojúhelník $\varDelta ASS_a$:

$$|S_aS|^2 = |AS|^2 + |AS_a|^2 - 2|AS||AS_a| \cos(\sphericalangle SAT)$$

$$|S_aS|^2 = |AS|^2 + |AS_a|^2 - 2|AS||AS_a| \frac{|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2}{2|AT||AS|}$$

$$|S_aS| = \sqrt{|AS|^2 + |AS_a|^2 - 2|AS||AS_a| \frac{|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2}{2|AT||AS|}}$$

Dosadíme $|AS_a| = \frac{3}{2}\ |AT|$ a protože chceme, aby $|S_aS| < |AS|$, vyjádříme nerovnici takto:

$$|AS| > \sqrt{|AS|^2 + (\frac{3}{2}\ |AT|\ )^2 - 2|AS|\frac{3}{2}\ |AT|\ \frac{|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2}{2|AT||AS|}}$$

Nyní máme vše připraveno pro krácení a zjednodušení výrazu.

$$|AS| > \sqrt{|AS|^2 + (\frac{3}{2}\ |AT|\ )^2 - \frac{3}{2}\ (|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2)}$$

$$|AS|^2 > |AS|^2 + \left(\frac{3}{2}\ |AT|\right)^2 - \frac{3}{2}\ (|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2)$$

$$\frac{3}{2}\ (|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2) > \frac{9}{4}\ |AT|^2$$

$$|AT|^2 + |AS|^2 - |ST|^2 > \frac{3}{2}\ |AT|^2$$

$$|AS|^2 > \frac{1}{2}\ |AT|^2 + |ST|^2$$

Nyní dosadíme za |AT| a |ST|:

$$|AS|^2 > \frac{1}{2}\left(|AS|^2 + \left(\frac{1}{3}\ |SV|\right)^2 - 2|AS|\frac{1}{3}|SV| \cos\alpha\right) + \left(\frac{1}{3}\ |SV|\right)^2$$

$$\frac{1}{2}|AS|^2 > \frac{1}{18}|SV|^2 - \frac{1}{3}|AS||SV| \cos\alpha + \frac{1}{9}\ |SV|^2$$

$$\frac{1}{2}|AS|^2 > \frac{1}{6}|SV|^2 - \frac{1}{3}|AS||SV| \cos\alpha$$

Použijeme cosinovou větu i pro trojúhelník AVS, který má u vrcholu S také úhelα:

$$|AV|^2 = |AS|^2 + |SV|^2 + -2|AS||SV| \cos\alpha$$

$$2|AS||SV| \cos\alpha = |AS|^2 + |SV|^2 - |AV|^2$$

$$-\frac{1}{3}|AS||SV| \cos\alpha = -\frac{1}{6}(|AS|^2 + |SV|^2 - |AV|^2)$$

Dosadíme-li do nerovnice, obdržíme následující výraz. Zjednodušíme:

$$\frac{1}{2}|AS|^2 > \frac{1}{6}|SV|^2 - \frac{1}{6}(|AS|^2 + |SV|^2 - |AV|^2)$$

$$\frac{2}{3}|AS|^2 > \frac{1}{6}|AV|^2$$

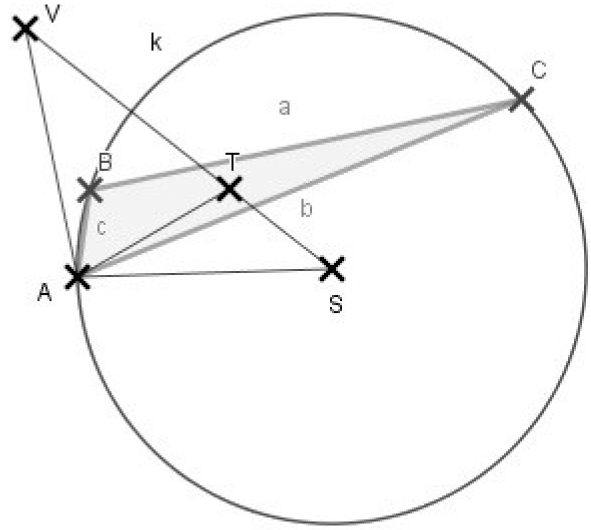
Vynásobíme obě strany nerovnice šesti a obdržíme

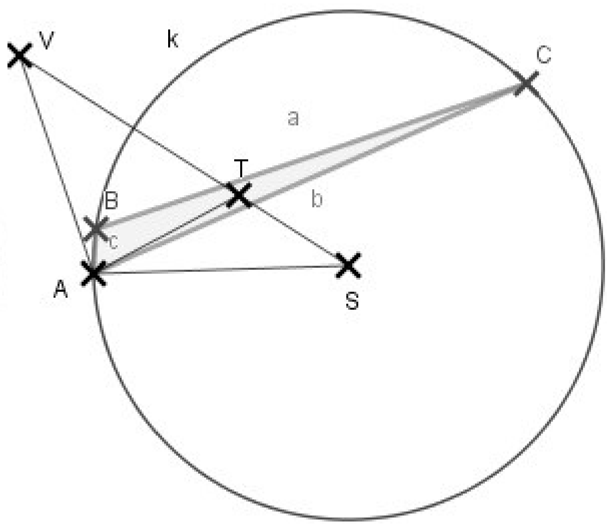
$$4|AS|^2 > |AV|^2$$

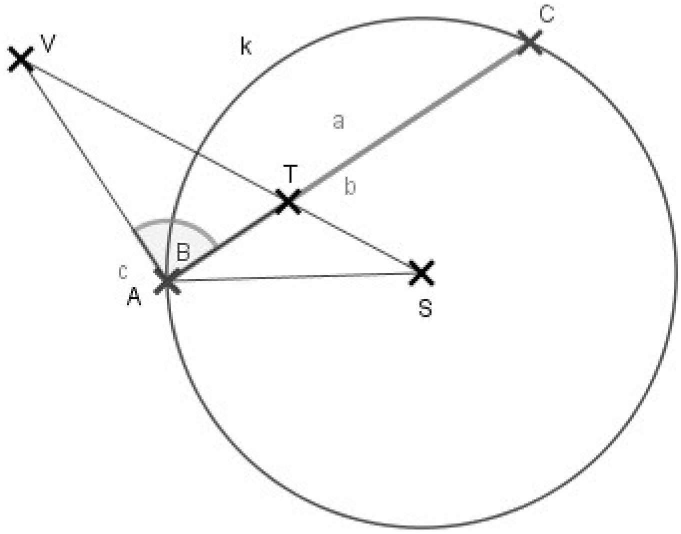
Tento výraz již jen odmocníme a nakonec dostáváme jednoduchý lineární vztah

$$2|AS| > |AV|$$

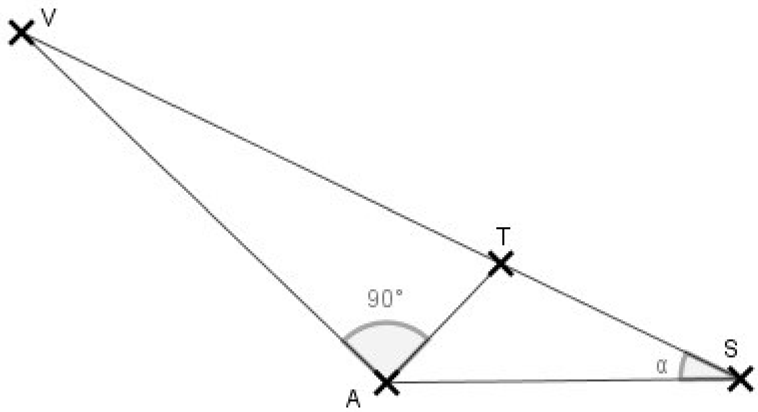
Další podmínkou pro existenci řešení v předchozím případě bylo, že nesmí nastat kolmost přímek $\overleftrightarrow{AV} \perp \overleftrightarrow{AT}$, protože se trojúhelník degeneruje do úsečky. Znázorněme – posouváno bude pouze bodem V, dokud nenastane, že velikost úhlu $\sphericalangle VAT$ bude rovna $90°$. Úhel je zvýrazněn ve třetím obrázku.







Nahlédněme na samotný trojúhelník $\triangle AVS$ s vyznačeným těžištěm, spojnicí bodů A a T a úhlem α , který jsme využili výše v diskuzi. Chceme předejít kolmosti $\overleftrightarrow{AV}$ a $\overleftrightarrow{AT}$ - zjistěme tedy, kdy kolmost nastane.



Známe vzdálenosti $|AS|, |SV|, |AV|$. Velikost $|TV|$ je dvoutřetinová oproti $|SV|$, $|ST|$ pak tvoří třetinu $|SV|$.

$$|TV| = \frac{2}{3}|SV|$$

$$|ST| = \frac{1}{3}|SV|$$

Vzdálenost $|AT|$ vyjádříme pomocí cosinové věty z trojúhelníka $\triangle ATS$.

$$|AT| = \sqrt{|AS|^2 + (\frac{1}{3}\ |SV|)^2 - 2|AS|\frac{1}{3}\ |SV| \cos\alpha}$$

Pro trojúhelník $\triangle ATV$ platí Pythagorova věta:

$$|TV|^2 = |AV|^2 + |AT|^2$$

Dosadíme dosud zjištěné vztahy pro $|TV|$ a $|AT|$:

$$(\frac{2}{3}|SV|)^2 = |AV|^2 + |AS|^2 + (\frac{1}{3}\ |SV|)^2 - 2|AS|\frac{1}{3}\ |SV| \cos\alpha$$

$$\frac{4}{9}|SV|^2 = |AV|^2 + |AS|^2 + \frac{1}{9}\ |SV|^2 - 2|AS|\frac{1}{3}\ |SV| \cos\alpha$$

$$\frac{1}{3}|SV|^2 = |AV|^2 + |AS|^2 - \frac{2}{3}|AS||SV| \cos\alpha$$

Abychom použili pouze vzdálenosti mezi body ze zadání, vyjádříme $-\frac{2}{3}|AS||SV|\cos\alpha$ z cosinové věty pro trojúhelník $\varDelta AVS$ (pokud bychom vyjadřovali jen $\cos\alpha$, dopouštěli bychom se zbytečného dělení, které by bylo méně obecné):

$$|AV|^2 = |AS|^2 + |SV|^2 - 2|AS||SV|\cos\alpha$$

$$2|AS||SV|\cos\alpha = |AS|^2 + |SV|^2 - |AV|^2$$

$$-\frac{2}{3}|AS||SV|\cos\alpha = -\frac{1}{3}(|AS|^2 + |SV|^2 - |AV|^2)$$

Dosaďme do vztahu výše a provedeme již jen několik úprav:

$$\frac{1}{3}|SV|^2 = |AV|^2 + |AS|^2 - \frac{1}{3}(|AS|^2 + |SV|^2 - |AV|^2)$$

$$\frac{1}{3}|SV|^2 = \frac{4}{3}|AV|^2 + \frac{2}{3}|AS|^2 - \frac{1}{3}|SV|^2$$

$$2|SV|^2 = 4|AV|^2 + 2|AS|^2$$

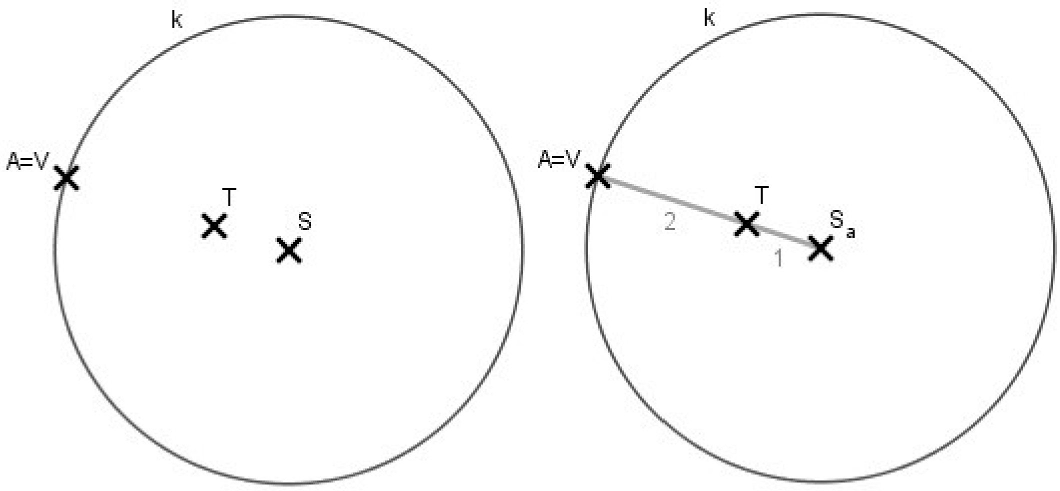
$$|SV|^2 = 2|AV|^2 + |AS|^2$$

Tento vztah tedy platí, pokud nastane kolmost $\overleftrightarrow{AT}$ a $\overleftrightarrow{AV}$ – případ nevedoucí k řešení. Aby řešení existovalo, rovnice nesmí platit.

$$|SV|^2 \neq 2|AV|^2 + |AS|^2$$

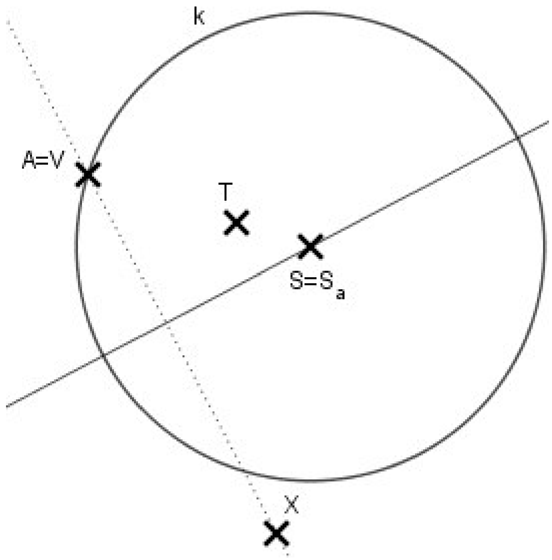
2) Vrchol A je roven ortocentru V

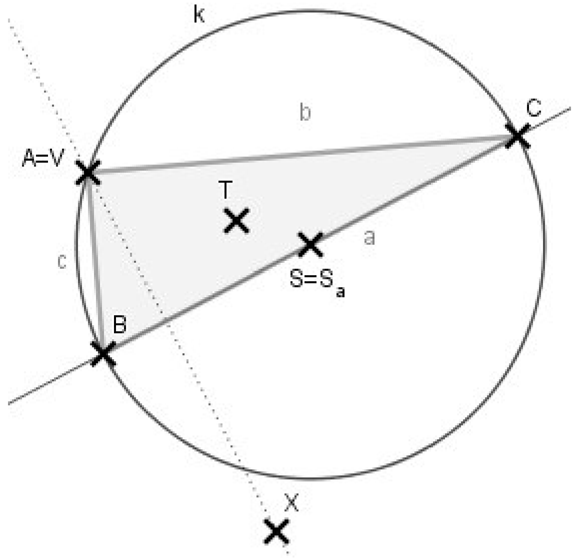
Ze vzájemné polohy bodů A a S sestrojíme kružnici opsanou. Ze vzájemné polohy bodů V a S určíme lokaci těžiště pomocí stejnolehlosti se středem v S s koeficientem $\frac{1}{3}$. Dále zobrazíme bod A ve stejnolehlosti se středem v T a koeficientem $-\frac{1}{2}$, abychom našli střed strany a.



Stejně jako v případě zadaných bodů A, V, T, kde $A = V$, zjišťujeme, že střed strany S_a vždy bude roven středu kružnice opsané. Zdůvodněme: Označíme-li vzdálenost $|VS| = 3x$, pak díky první stejnolehlosti (s koeficientem $\frac{1}{3}$) je vzdálenost $|TS| = 1x$. Zbylá vzdálenost $|VT| = |AT| = 2x$. Stejnolehlost se středem v těžišti s koeficientem $-\frac{1}{2}$ zobrazuje bod A na S_a, vzdálenost $|AT| = 2$ se redukuje na $|TS_a| = 1$. Vzdálenost $|AS_a|$ je tak rovna 3, stejně jako $|AS|$. Střed strany a je tedy roven středu kružnice opsané.

Od tohoto ujištění je již konstrukce jednoduchá. Zvolíme bod $X \neq A$ tak, aby nebyl 1) kolineární se zadanými body a 2) přímka $\overleftrightarrow{AX}$ nebyla kolmá na přímku $\overleftrightarrow{AT}$. Následně zkonstruujeme kolmici na $|AX|$ procházející bodem S_a, ta se protne s kružnicí ve dvou bodech, kterými jsou B a C.





Zápis konstrukce:

0) A, V, S
1) $T; H\left(S, \frac{1}{3}\right): V \rightarrow T$
2) $S_a = S;\ H\left(T, -\frac{1}{2}\right):\ A \rightarrow S_a$
3) $k; k(S; |AS|)$
4) $X; A \neq X\ \wedge \sphericalangle|XAT| \neq 90°$
5) $p; S_a \in p\ \wedge p \perp \overleftrightarrow{AX}$
6) $B, C; B, C \in k\ \cap p$
7) $\triangle ABC$

Diskuze řešení 2):

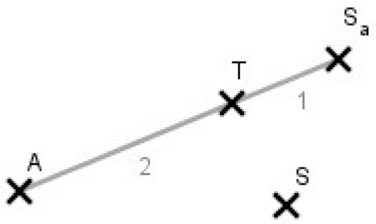
Lokaci těžiště můžeme určit vždy. Jediná situace nevedoucí k řešení je, když výšku volíme kolmo na $\overleftrightarrow{AT}$. Body B, C tvoří průměr kružnice k. Řešení je nekonečně mnoho. Vzniklé trojúhelníky $\triangle ABC$ jsou pravoúhlé.

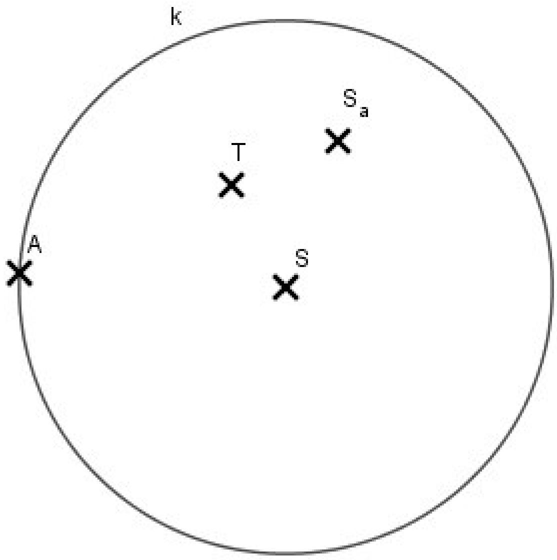
7.Vrchol, těžiště a střed kružnice opsané

Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li zadána poloha vrcholu A, těžiště T a středu kružnice opsané S.

Řešení:

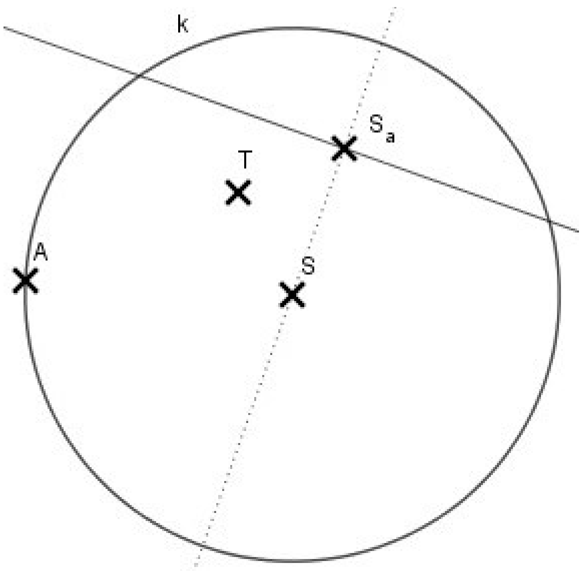
Ze zadání ihned určíme kružnici opsanou i střed strany a.

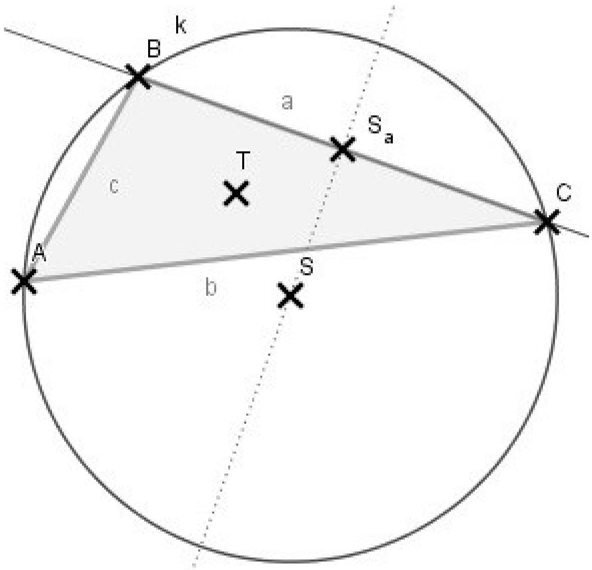




Obejděme se tentokrát bez znalosti polohy ortocentra. Hledáme dva body na kružnici k takové, aby S_a byl středem úsečky, která tyto dva body spojuje.

Střed kružnice opsané se nachází na osách stran – všechny tři osy se v něm protínají. Bod S_a je ovšem rovněž součástí osy strany a. Protože osa úsečky je na úsečku kolmá a kolmost přímek (úseček) je vzájemná, řešení získáme tak, že sestrojíme kolmici na přímku $\overleftrightarrow{SS_a}$ procházející bodem S_a. Kolmice protíná kružnici k ve dvou bodech, kterými jsou vrcholy B a C.



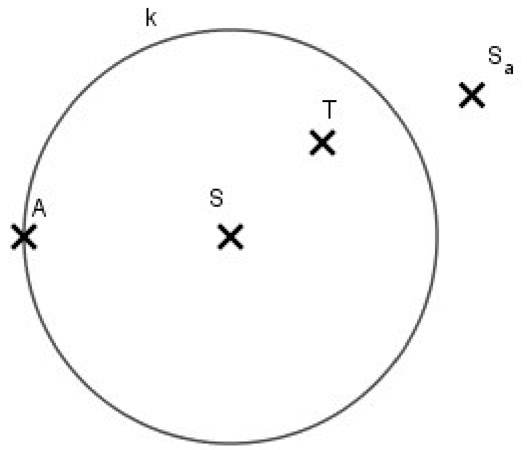


Zápis konstrukce:

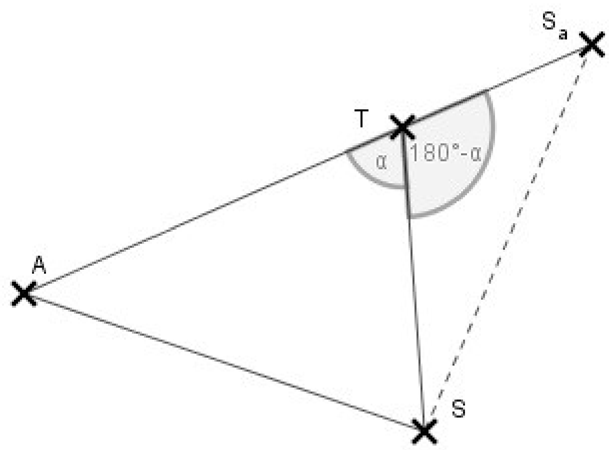
0) A, T, S
1) $S_a; H\left(T, -\frac{1}{2}\right): A \rightarrow S_a$
2) $k; k(S, |AS|)$
3) $\overleftrightarrow{S_aS}$
4) $p; S_a \in p \wedge p \perp \overleftrightarrow{S_aS}$
5) $B, C; B, C \in p \cap k$
6) $\triangle ABC$

Diskuze řešení:

Vždy můžeme ve stejnolehlosti podle T zobrazit bod A. Problémovým případem je, když se bod S_a zobrazí mimo vnitřnek kružnice, viz obrázek:



Stejně jako u případů A, V, T a A, V, S uplatníme nerovnost $|S_aS| < |AS|$. Vzdálenost $|AS|$ získáme ze zadání přímo, k dispozici máme ještě vzdálenosti $|AT|$ a $|ST|$. Označíme $\alpha = \sphericalangle AST$. Následující obrázek budiž pomocným náčrtkem:



Zajisté platí, že $|S_aT| = \frac{1}{2}|AT|$. Vzdálenost $|S_aS|$ určíme z cosinové věty:

$$|S_aS|^2 = |ST|^2 + (\frac{1}{2}|AT|)^2 - 2|ST|\frac{1}{2}|AT|\cos(180° - \alpha)$$

$$|S_aS|^2 = |ST|^2 + \frac{1}{4}|AT|^2 + |ST||AT|\cos\alpha$$

$$|S_aS| = \sqrt{|ST|^2 + \frac{1}{4}|AT|^2 + |ST||AT|\cos\alpha}$$

Jelikož chceme, aby $|S_aS| < |AS|$, utvoříme nerovnici:

$$|AS| > \sqrt{|ST|^2 + \frac{1}{4}|AT|^2 + |ST||AT|\cos\alpha}$$

$$|AS|^2 > |ST|^2 + \frac{1}{4}|AT|^2 + |ST||AT|\cos\alpha$$

Připravme údaje ze zadání na dosazení:

$$|AS|^2 = |AT|^2 + |ST|^2 - 2|AT||ST|\cos\alpha$$

$$2|AT||ST|\cos\alpha = |AT|^2 + |ST|^2 - |AS|^2$$

$$|AT||ST|\cos\alpha = \frac{1}{2}(|AT|^2 + |ST|^2 - |AS|^2)$$

Dosadíme do nerovnosti:

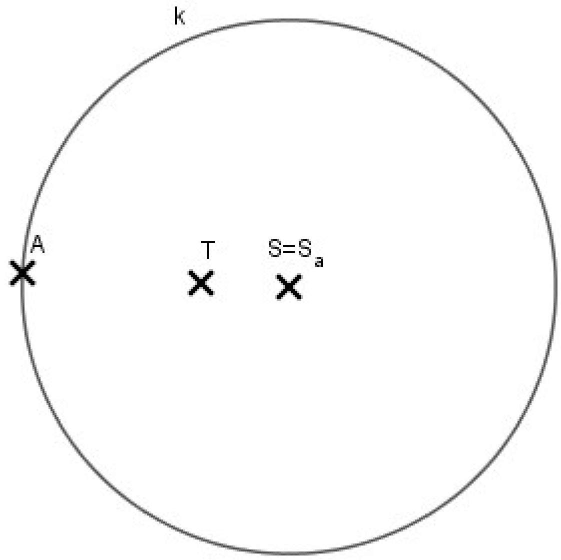
$$|AS|^2 > |ST|^2 + \frac{1}{4}|AT|^2 + \frac{1}{2}(|AT|^2 + |ST|^2 - |AS|^2)$$

$$\frac{3}{2}|AS|^2 > \frac{3}{2}|ST|^2 + \frac{3}{4}|AT|^2$$

Vynásobíme obě strany nerovnice $\frac{2}{3}$, získáváme výslednou nerovnost, která je podmínkou pro existenci řešení při zadaných bodech A, S, T:

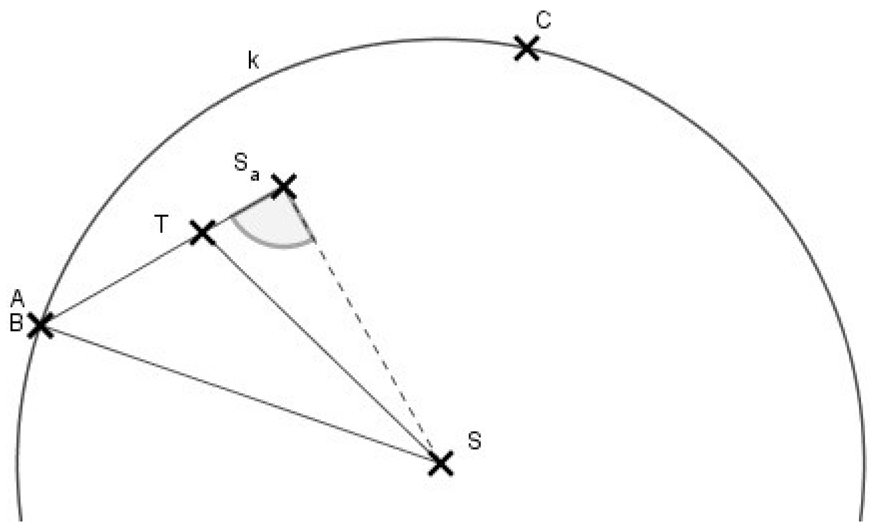
$$|AS|^2 > |ST|^2 + \frac{1}{2}|AT|^2$$

Dalším speciálním případem je, když nastane rovnost bodů S_a a S, znázorněme:



Těžiště se v tomto případě nachází ve dvou třetinách vzdálenosti od bodu A k bodu S. Stejnolehlost se středem v těžišti, kterou získáme S_a, nám tak zobrazí bod A přímo na střed kružnice opsané. Libovolné, na kružnici protilehlé, body B a C mají za střed své spojnice právě bod S_a. Aby vzniknul trojúhelník $\triangle ABC$, musíme jen zajistit nekolinearitu vrcholů, na to postačuje $B \neq A, C \neq A$. Tento případ tedy vede k nekonečně mnoha řešením.

Konečně musíme ošetřit případ, kdy je $\overleftrightarrow{S_a S}$ kolmá na $\overleftrightarrow{AT}$, tento případ totiž vytváří opět tři kolineární body A, B, C, viz obr.:



Tentokrát použijme nadvakrát Pythagorovu větu:

$$|AS|^2 = |S_aS|^2 + |AS_a|^2$$

$$|ST|^2 = |S_aS|^2 + |S_aT|^2$$

Vyjádříme pomocí údajů ze zadání a osamostatníme u obou rovnic $|S_aS|^2$:

$$|S_aS|^2 = |AS|^2 - (\frac{3}{2}|AT|)^2$$

$$|S_aS|^2 = |ST|^2 - (\frac{1}{2}|AT|)^2$$

Obě pravé strany v tuto chvíli můžeme dát do rovnosti:

$$|ST|^2 - \left(\frac{1}{2}|AT|\right)^2 = |AS|^2 - \left(\frac{3}{2}|AT|\right)^2$$

$$|ST|^2 - \frac{1}{4}|AT|^2 = |AS|^2 - \frac{9}{4}|AT|^2$$

$$|ST|^2 + 2|AT|^2 = |AS|^2$$

Připomeňme, že tento vztah nevede k řešení - rovnost tedy nesmí platit, chceme-li k řešení dojít:

$$|ST|^2 + 2|AT|^2 \neq |AS|^2$$

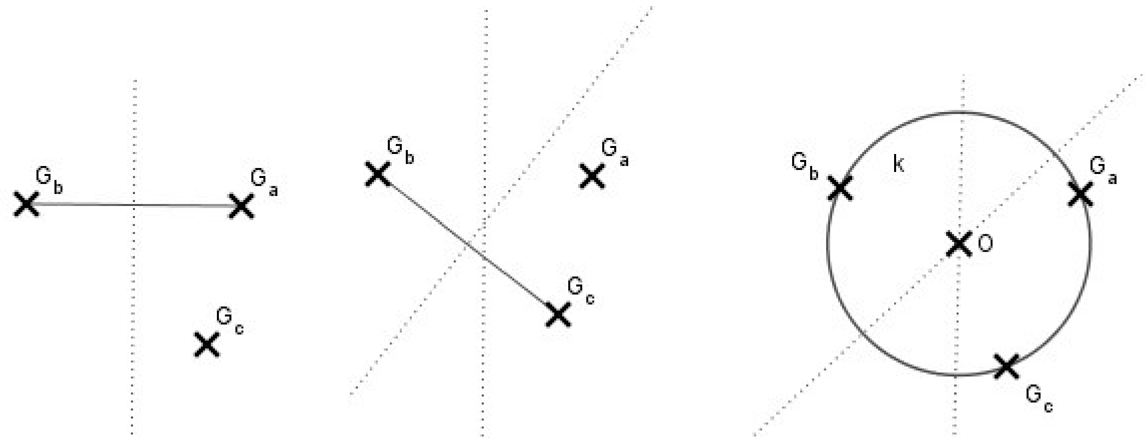
8.Tři průsečíky kružnice vepsané trojúhelníku

Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, znáte-li polohu všech tří průsečíků kružnice jemu vepsané. Průsečíky značme G_a, G_b, G_c.

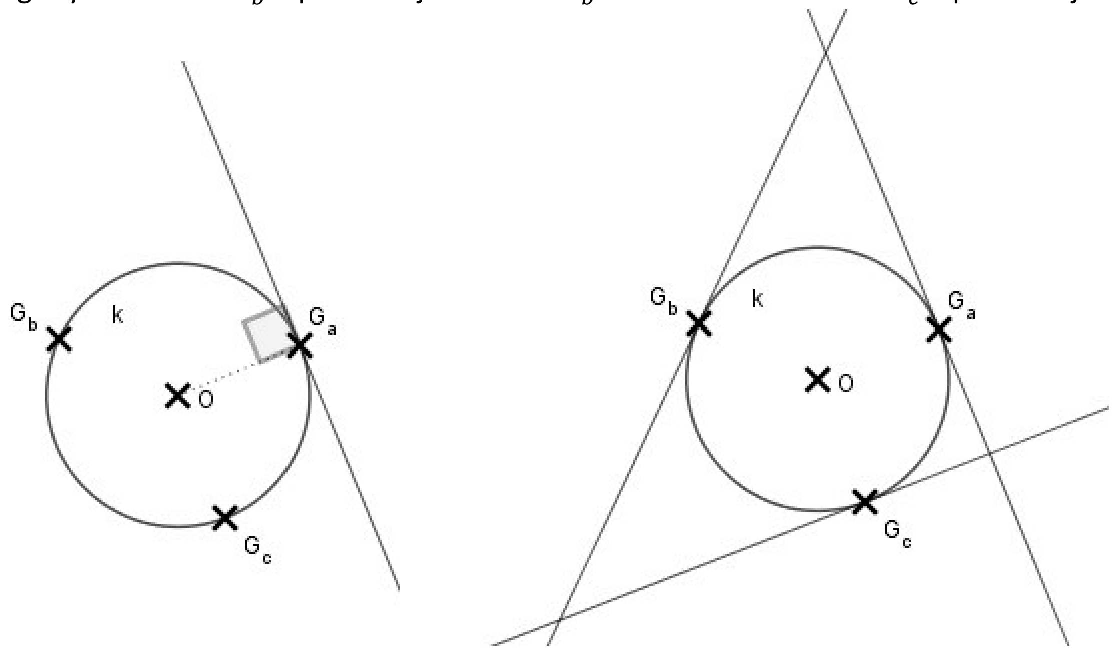
Řešení:

Máme-li zadány tři body ležící na téže kružnici, máme ji tím jednoznačně určenu. Začněme tím, že samotnou kružnici sestrojíme. Chceme tedy narýsovat kružnici, která prochází třemi danými body. To můžeme vnímat jako úlohu sestrojení kružnice opsané trojúhelníku tvořeného právě těmito třemi body. Kružnice vepsaná trojúhelníku je tedy rovna kružnici opsané trojúhelníku jejích tří průsečíků se stranami trojúhelníka.

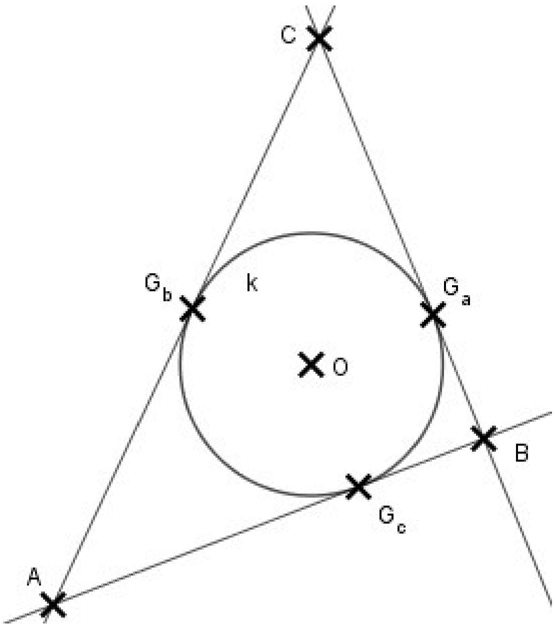
Opíšeme tedy kružnici bodům G_a, G_b, G_c. Postačí sestrojit dvě osy úseček mezi těmito body a kružnici i s jejím středem získáme:

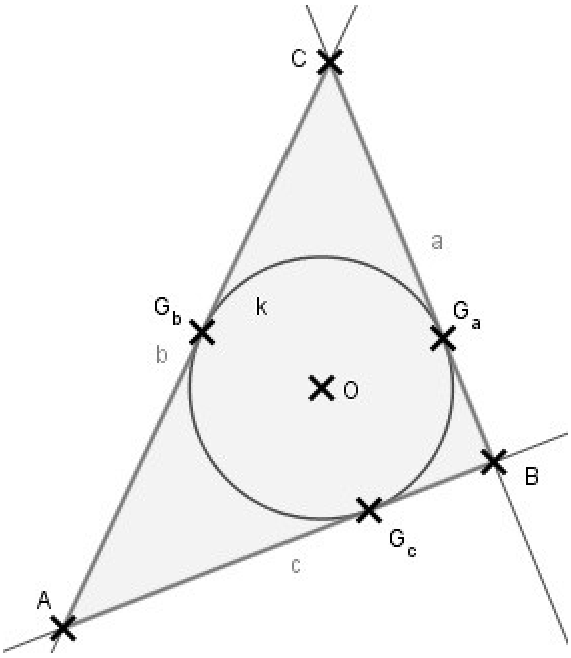


Povedeme-li nyní tečny ke kružnici v bodech G_a, G_b, G_c, obdržíme přímky, na kterých se nachází jednotlivé strany trojúhelníka. Sestrojíme tedy kolmici na G_aO procházející bodem G_a, analogicky kolmici na G_bO procházející bodem G_b a konečně kolmici na G_cO procházející G_c.



Na průsečíku dvou tečen vždy vznikne jeden z vrcholů trojúhelníka $\triangle ABC$ – body označíme a tím je konstrukce dokončena.





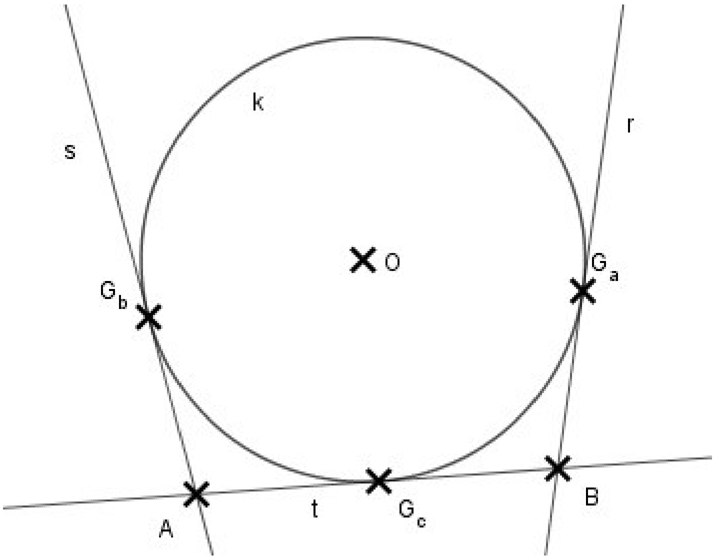
Zápis konstrukce:

0) G_a, G_b, G_c
1) *Osa úsečky* $G_aG_b = p$
2) *Osa úsečky* $G_bG_c = q$
3) $O; O \in p \cap q$
4) $k; k(O, |G_aO|)$
5) $r; G_a \in r \wedge r \perp G_aO$
6) $s; G_b \in s \wedge s \perp G_bO$
7) $t; G_c \in t \wedge t \perp G_cO$
8) $A; A \in s \cap t$
9) $B; B \in r \cap t$
10) $C; C \in r \cap s$
11) $\triangle ABC$

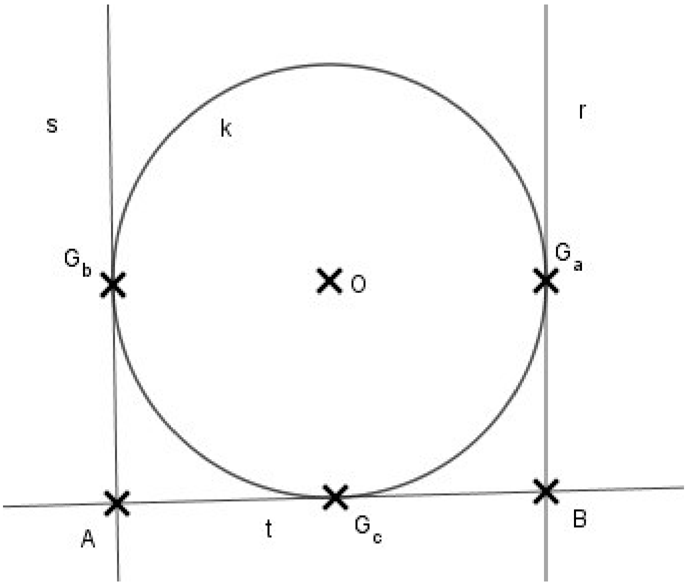
Diskuze řešení:

Řešení rozhodně nemusí vždy existovat. Problém může nastat již u samotné konstrukce kružnice. Pokud budou body G_a, G_b, G_c kolineární, kružnici nesestrojíme.

Nejedná se ale o jediný případ, který nevede k řešení. Pohleďme například na případ, kdy se střed kružnice opsané nachází příliš daleko od úsečky AB:



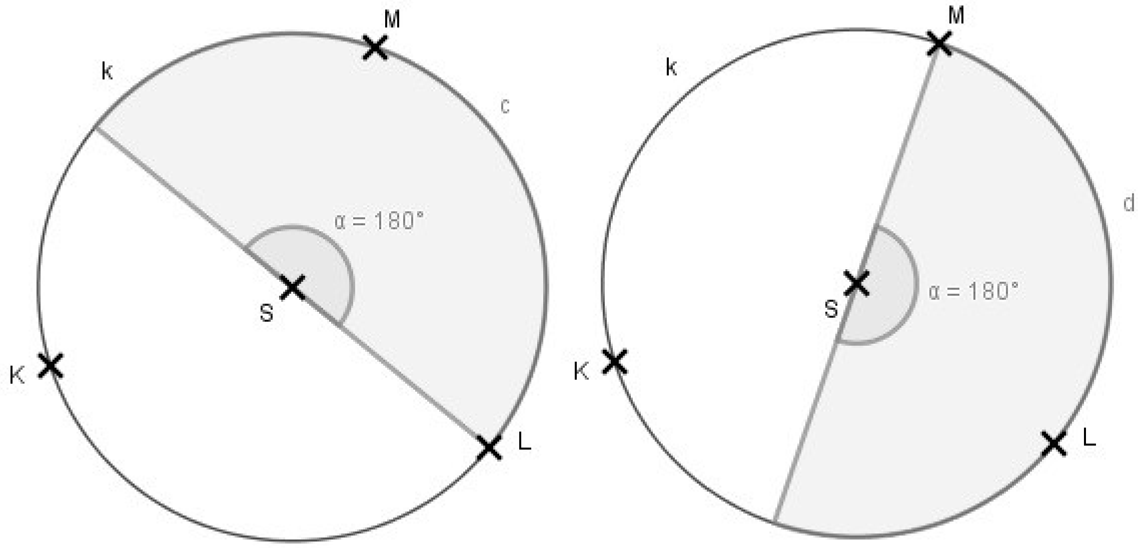
Tečny vedoucí z bodů G_a a G_b se v části roviny, kde hledáme třetí vrchol, rozbíhají, a není tak možné, aby se nad kružnicí střetly. Hraničním případem se zdá být situace, kde jsou přímky s a r rovnoběžné:



Snadno nahlédneme, že tečny s a t budou rovnoběžné, bude-li úsečka G_aG_b průměrem kružnice. Jakmile bychom vhodně zmenšili úhel $\sphericalangle G_bG_cG_a$, tečny ke kružnici r a s by se protnuly ve „správné“ polorovině ohraničené přímkou t a obsahující bod O.

Ke zformulování podmínky existence řešení využijeme souvislost ostroúhlých trojúhelníků s větou o obvodových a středových úhlech.

Pro každý ostroúhlý trojúhelník a kružnici jemu opsanou platí, že jeho vrcholy se nenachází na téže půlkružnici. Znázorněme příklad, kde půlkružnice obsahující body L a M nedosahuje na bod K:



Ostroúhlý trojúhelník má všechny vnitřní úhly menší než 90°. Pakliže na každý z nich nahlédneme jako na úhel obvodový, je zřejmé, že příslušné středové úhly nemohou být rovny nebo větší než $180°$.

Tato myšlenka má přímou souvislost s naším zadáním. Budou-li se body G_a, G_b, G_c nacházet na téže půlkružnici jim opsané, snadno pozorujeme, že tečny jimi vedené kružnici neuzavřou. Podmínkou pro řešitelnost úlohy tedy je, aby trojúhelník $\triangle G_a G_b G_c$ byl ostroúhlý.

Vyjádřeme ještě za pomoci cosinové věty. Úhel při vrcholu G_a trojúhelníka $\triangle G_a G_b G_c$ označme α, úhel při G_b nazveme β a úhel při G_c budiž γ.

$$|G_aG_b|^2 = |G_bG_c|^2 + |G_aG_c|^2 - 2|G_bG_c||G_aG_c|\cos\gamma$$

$$|G_bG_c|^2 = |G_aG_b|^2 + |G_aG_c|^2 - 2|G_aG_b||G_aG_c|\cos\alpha$$

$$|G_aG_c|^2 = |G_bG_c|^2 + |G_aG_b|^2 - 2|G_bG_c||G_aG_b|\cos\beta$$

V ostroúhlém trojúhelníku všechny hodnoty cosinu nabývají kladných hodnot, vyjmutím členů obsahujících cosinus tedy hodnotu pravých stran zvýšíme (tyto členy jsou všechny záporné). Uzavřeme tedy diskuzi nerovnostmi, všechny tři platí zároveň:

$$|G_aG_b|^2 < |G_bG_c|^2 + |G_aG_c|^2$$

$$|G_bG_c|^2 < |G_aG_b|^2 + |G_aG_c|^2$$

$$|G_aG_c|^2 < |G_bG_c|^2 + |G_aG_b|^2$$

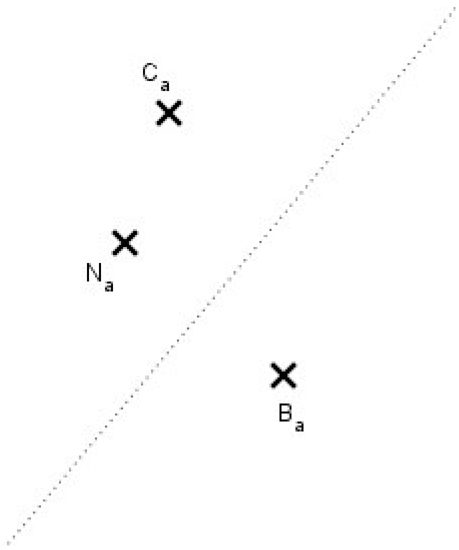
9.Tři průsečíky kružnice připsané trojúhelníku

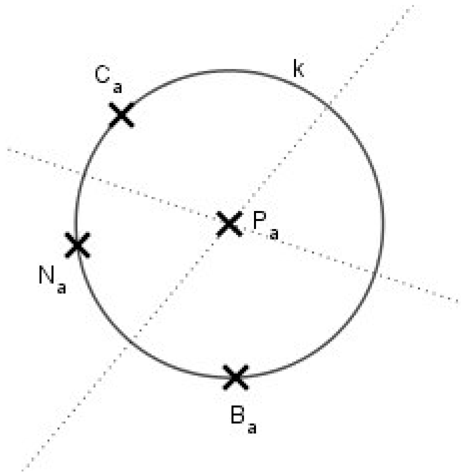
Zadání: Sestrojte trojúhelník $\varDelta ABC$, máte-li zadány tři průsečíky kružnice připsané trojúhelníku, značeny B_a, C_a, N_a.

B_a náleží přímce $\overleftrightarrow{BA}$, C_a náleží přímce $\overleftrightarrow{CA}$, N_a náleží úsečce BC.

Řešení:

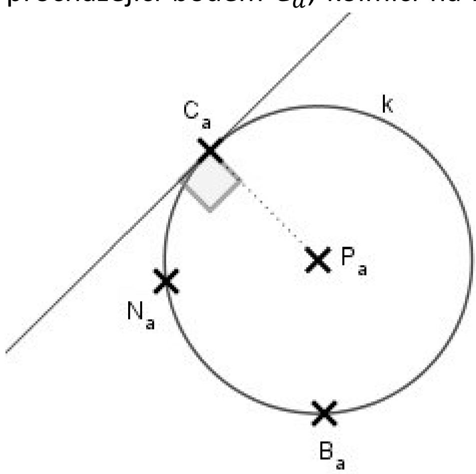
Kružnici máme jednoznačně určenu, stejně jako v předchozím případě. Sestrojíme ji znovu pomocí dvou os úseček mezi body B_a, C_a, N_a. Průsečík tentokrát značíme P_a.

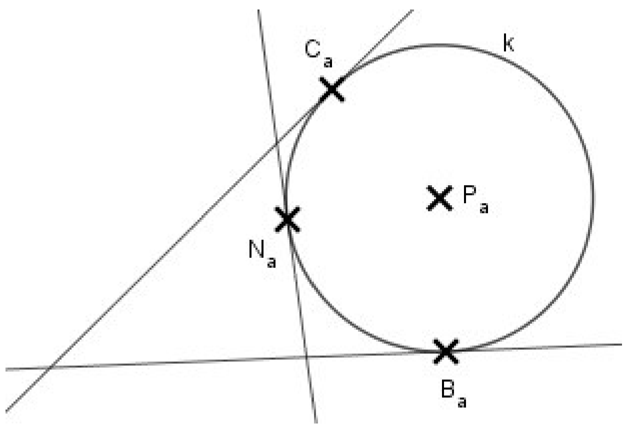




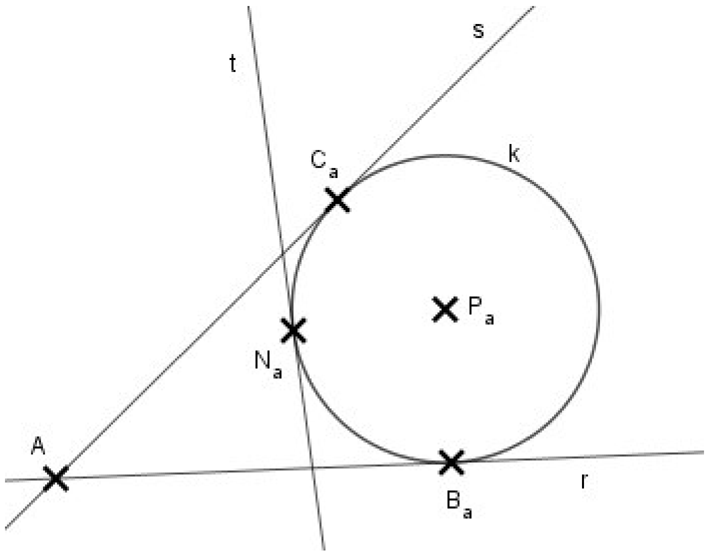
Kružnice připsaná trojúhelníku je, stejně jako kružnice vepsaná, opět rovna kružnici opsané trojúhelníku jejích tří průsečíků s přímkami obsahujícími strany hledaného trojúhelníka.

Nyní se nabízí prakticky stejný postup jako u tří průsečíků kružnice vepsané trojúhelníku. Rozhodně jsme schopni sestrojit tečny ke kružnici v jednotlivých bodech. Tím nalezneme kýžené přímky, na kterých hledáme vrcholy trojúhelníka. Sestrojíme postupně kolmici na C_aP_a procházející bodem C_a, kolmici na B_aP_a procházející B_a a kolmici na N_aP_a procházející N_a.

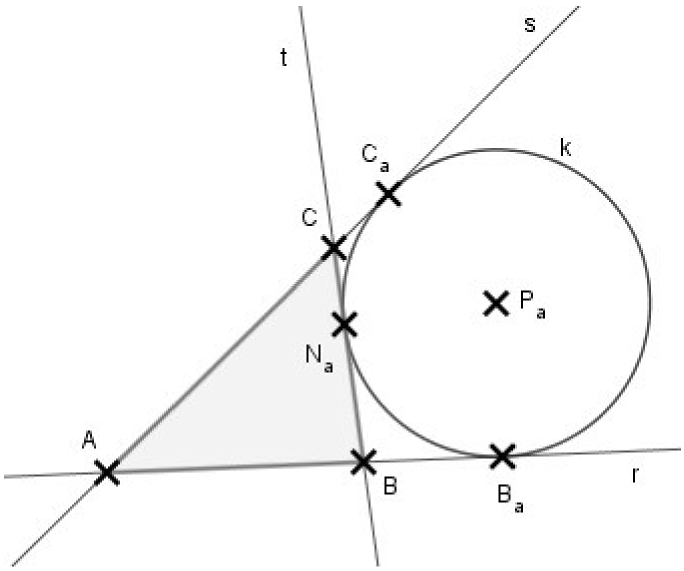




Tečnu v bodě B_a označíme r, tečnu v bodě C_a označíme s a tečnu v N_a označíme t. Vrcholy trojúhelníka $\triangle ABC$ se budou nacházet na průsečíkách těchto tečen. Ze zadání víme, že B_a náleží $\overleftrightarrow{BA}$, C_a náleží $\overleftrightarrow{CA}$, jejich průsečík označíme A.



Analogicky provedeme pro zbývající dva body, tím je konstrukce dokončena.

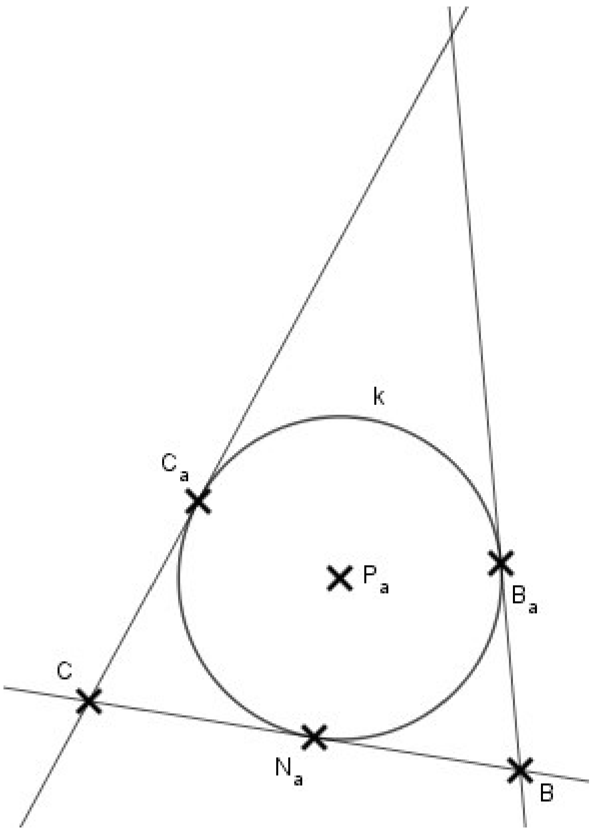


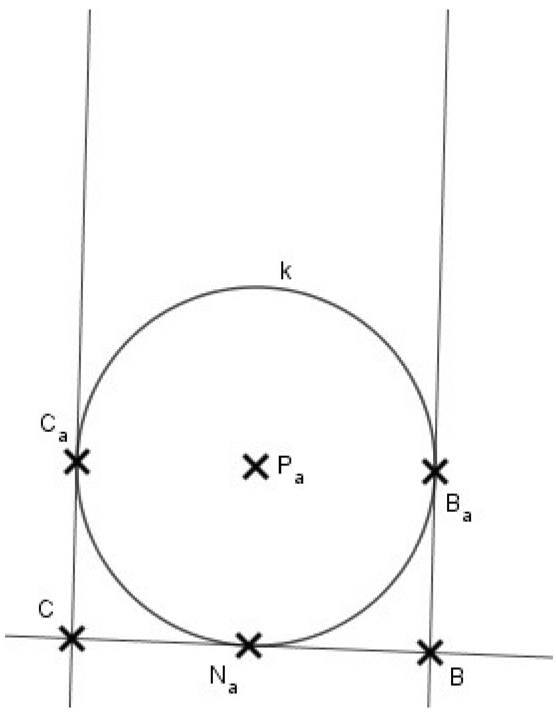
Zápis konstrukce:

0) B_a, C_a, N_a
1) *Osa úsečky* $B_aN_a = p$
2) *Osa úsečky* $C_aN_a = q$
3) $P_a; P_a \in p \cap q$
4) $k; k(S_a, |C_aS_a|)$
5) $r; B_a \in r \wedge r \perp B_aP_a$
6) $s; C_a \in s \wedge s \perp C_aP_a$
7) $t; N_a \in t \wedge t \perp N_aP_a$
8) $A; A \in r \cap s$
9) $B; B \in r \cap t$
10) $C; C \in s \cap t$
11) $\triangle ABC$

Diskuze řešení:

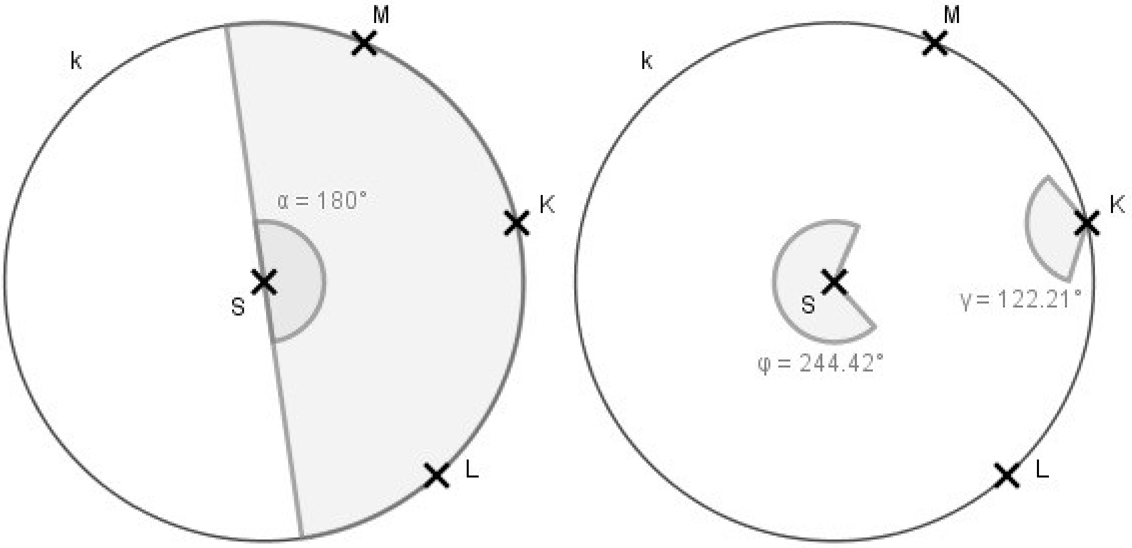
Diskuze řešení je, podobně jako konstrukce, podobná případu zadaných průsečíků kružnice vepsané trojúhelníku. Opět nesmí nastat, že by zadané body byly kolineární. U průsečíků kružnice vepsané bylo třeba, aby body dotyku tvořily ostroúhlý trojúhelník. Znázorněme spolu s případem, kdy dvě tečny vycházejí rovnoběžně:





Tento případ by mohl fungovat opačně. Případ uzavření kružnice nastává ve chvíli, kdy je trojúhelník $\varDelta B_a C_a N_a$ ostroúhlý. Případ rovnoběžných tečen nastává u $\varDelta B_a C_a N_a$ pravoúhlého (snadno nahlédneme, že úsečka $B_a C_a$ tvoří průměr kružnice, N_a pak můžeme chápat jako bod na Thaletově kružnici). Dokažme, že aby existovalo řešení, trojúhelník $\varDelta B_a C_a N_a$ musí být tupoúhlý s tupým úhlem u vrcholu N_a.

Pro každý tupoúhlý trojúhelník a kružnici jemu opsanou platí, že jeho vrcholy se nachází na téže půlkružnici.



V tupoúhlém trojúhelníku je jeden z úhlů větší než 90° (zde znázorněno na úhlu $\sphericalangle LKM$). Jemu příslušný středový úhel (zde φ), jehož hodnota je dvojnásobná, je pak rozhodně větší než 180°. Snadno pozorujeme, že se na něm nachází 180stupňový úsek neobsahující ramena $\longmapsto SM$ ani $\longmapsto SL$. Součástí tohoto úseku je i půlkružnice, která neobsahuje ani jeden z bodů K, L, M.

Souvislost s úlohou je patrná. Opíšeme-li kružnici tupoúhlému trojúhelníku $\varDelta KLM$ a sestrojíme-li k ní tečny v těchto třech bodech, bude tato kružnice připsaná trojúhelníku tvořeném vzájemnými průsečíky těchto tečen. Bod K bude ležet uvnitř strany tohoto trojúhelníku, zatímco L a M budou ležet na prodloužených stranách trojúhelníku.

Podmínkou existence řešení tedy je, aby trojúhelník $\varDelta B_a C_a N_a$ byl tupoúhlý s tupým úhlem u vrcholu N_a. To lze vypozorovat ve chvíli, kdy se body B_a, C_a, N_a nacházejí na téže půlkružnici na k (vyjma případu, kdy dva z těchto bodů tvoří průměr kružnice).

Úhel při $C_a = \beta$, úhel při $N_a = \gamma$ a úhel při $B_a = \delta$. Vyjádřeme podmínku opět pomocí délek a cosinové věty.

$$|N_a B_a|^2 = |B_a C_a|^2 + |N_a C_a|^2 - 2|B_a C_a||N_a C_a| \cos \beta$$

$$|B_a C_a|^2 = |N_a B_a|^2 + |N_a C_a|^2 - 2|N_a B_a||N_a C_a| \cos \gamma$$

$$|N_a C_a|^2 = |B_a C_a|^2 + |N_a B_a|^2 - 2|B_a C_a||N_a B_a| \cos \delta$$

Cosinus tupého úhlu nabývá záporných hodnot. Tupý úhel je v našem případě úhel γ, člen $-2|N_aB_a||N_aC_a|\cos\gamma$ je součinem dvou záporných čísel a dvou kladných vzdáleností – je celkově kladný. U zbylých dvou rovností tomu tak není. Odebereme-li členy obsahující cosinus, obdržíme následující nerovnice:

$$|N_aB_a|^2 < |B_aC_a|^2 + |N_aC_a|^2$$

$$|B_aC_a|^2 > |N_aB_a|^2 + |N_aC_a|^2$$

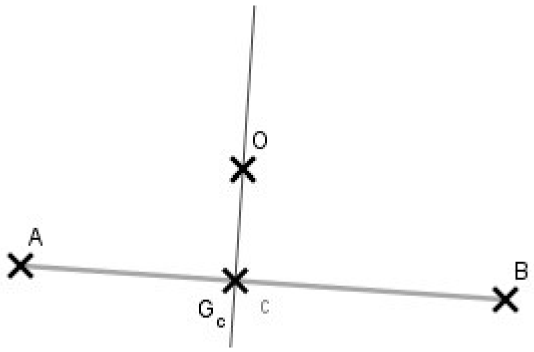
$$|N_aC_a|^2 < |B_aC_a|^2 + |N_aB_a|^2$$

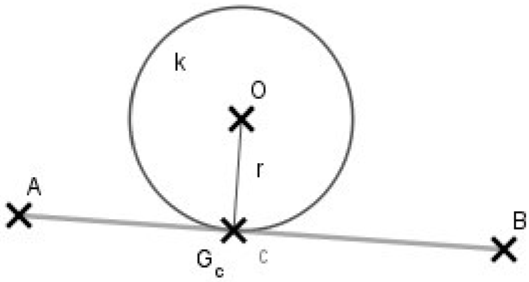
10.Dva vrcholy a střed kružnice vepsané

Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, máte-li zadán vrchol A, vrchol B a střed kružnice vepsané O.

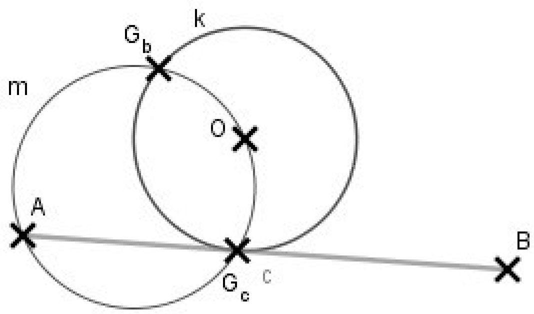
Řešení:

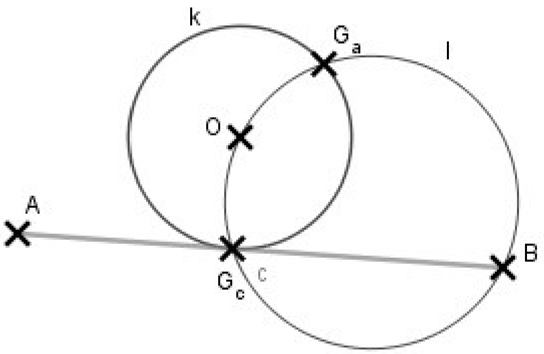
Začněme sestrojením úsečky AB. Jelikož je O střed kružnice vepsané, dotýká se této úsečky právě v jednom bodě. Tento bod získáme tak, že povedeme kolmici na úsečku AB procházející bodem O. Získáme tak poloměr kružnice vepsané. Průsečík označme G_c.



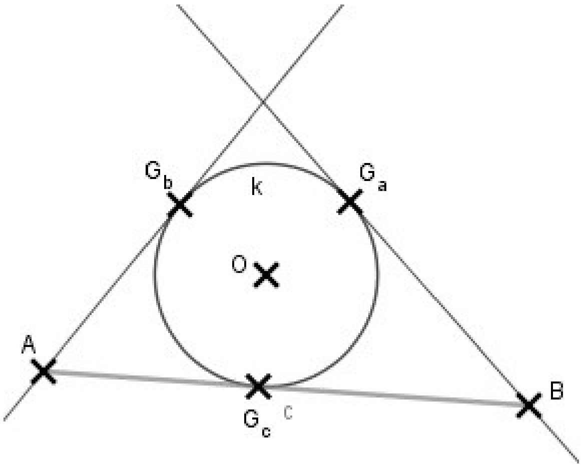


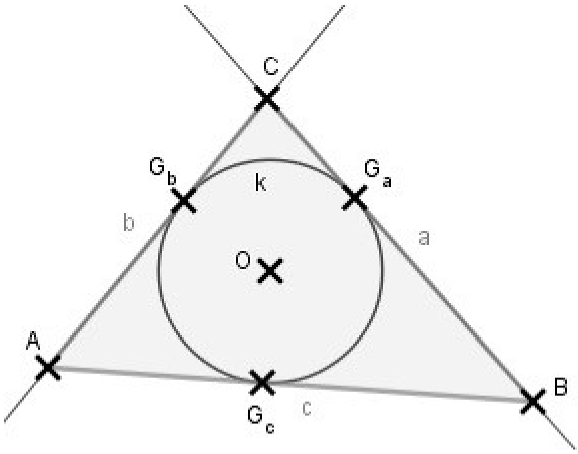
Kružnice vepsaná se právě v jednom bodě dotýká i ostatních stran. Abychom strany získali, sestrojme tečny ke kružnici jak z bodu A, tak z bodu B. Využijeme k tomu Thaletovy kružnice. Nejprve sestrojíme Thaletovu kružnici nad AO, označme ji m. Kružnice m a k budou mít dva průsečíky, zvolíme ten, který není roven G_c, a označíme ho G_b. Zcela analogicky sestrojíme Thaletovu kružnici nad BO, označíme ji l, dosud neoznačený průsečík nazveme G_a.





Tím máme sestrojeny tečné body. Nyní sestrojíme přímky $\overleftrightarrow{AG_b}$ a $\overleftrightarrow{BG_a}$ – jejich průsečíkem je bod C. Znázorněme na obrázku:



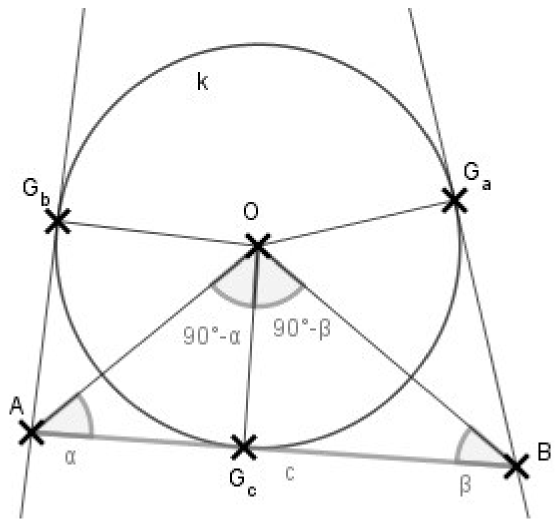


Zápis konstrukce:

0) A, B, O
1) $c = AB$
2) $p; O \in p \wedge p \perp AB$
3) $G_c; G_c \in AB \cap p$
4) $k; k(O, |G_cO|)$
5) $m; m$ *je Thaletova kružnice nad* AO
6) $l; l$ *je Thaletova kružnice nad* BO
7) $G_b; G_b \in k \cap m$
8) $G_a; G_a \in k \cap l$
9) $\overleftrightarrow{AG_b}$
10) $\overleftrightarrow{BG_a}$
11) $C; C \in \overleftrightarrow{AG_b} \cap \overleftrightarrow{BG_a}$
12) $\triangle ABC$

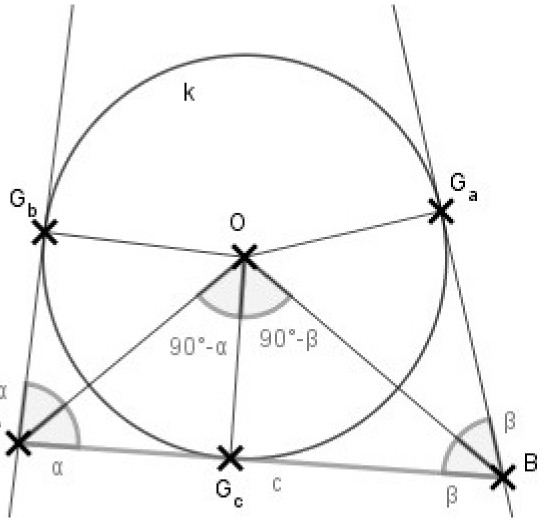
Diskuze řešení:

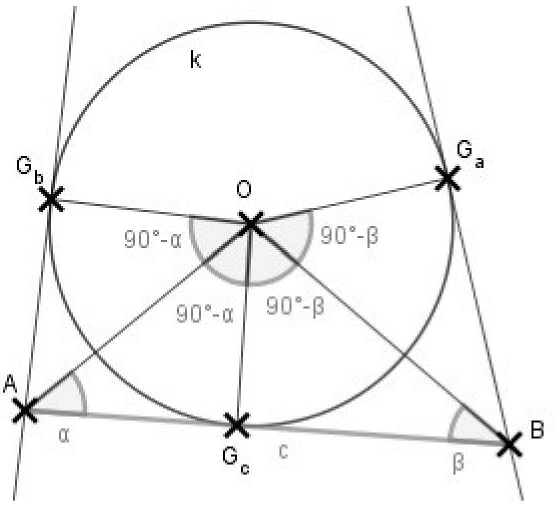
Trojúhelníky $\triangle AG_cO$ a $\triangle BG_cO$ jsou pravoúhlé. Označme úhly $\sphericalangle OAG_c = \alpha, \sphericalangle OBG_c = \beta$. Hned můžeme odvodit $\sphericalangle AOG_c = 90° - \alpha$ a , $\sphericalangle BOG_c = 90° - \beta$.



V sekci „Kružnice vepsaná a připsaná, středy kružnic vepsané a připsaných“ byla zmíněna důležitá vlastnost – totiž lokace jejich středu na osách úhlů jim příslušnému trojúhelníku. Čtyřúhelníky AG_bOG_c a BG_cOG_a jsou popořadě osově souměrné podle os $\overleftrightarrow{AO}$ a $\overleftrightarrow{BO}$. Z toho plynou rovnosti úhlů $\sphericalangle G_bAO = \alpha$ a $\sphericalangle G_aBO = \beta$.

a především $\sphericalangle G_bOA = 90° - \alpha$ a $\sphericalangle G_aOB = 90° - \beta$, znázorněme na obrázku:





Bod O je středem kružnice vepsané hledanému trojúhelníku. Na základě diskuze u případu tří průsečíků kružnice vepsané trojúhelníku víme, že trojúhelník $\triangle G_aG_bG_c$ musí být ostroúhlý. To by nastalo v případě, že body G_a, G_b, G_c neleží na žádné půlkružnici nacházející se na k. Pokud součet úhlů

$$(90° - \alpha) + (90° - \alpha) + (90° - \beta) + (90° - \beta) > 180°,$$

můžeme si být jisti, že trojúhelník $\triangle G_aG_bG_c$ ostroúhlý bude. Upravme:

$$360° - 2\alpha - 2\,\beta > 180°$$

$$180° > 2\alpha + 2\beta$$

Docházíme k jednoduchému vztahu

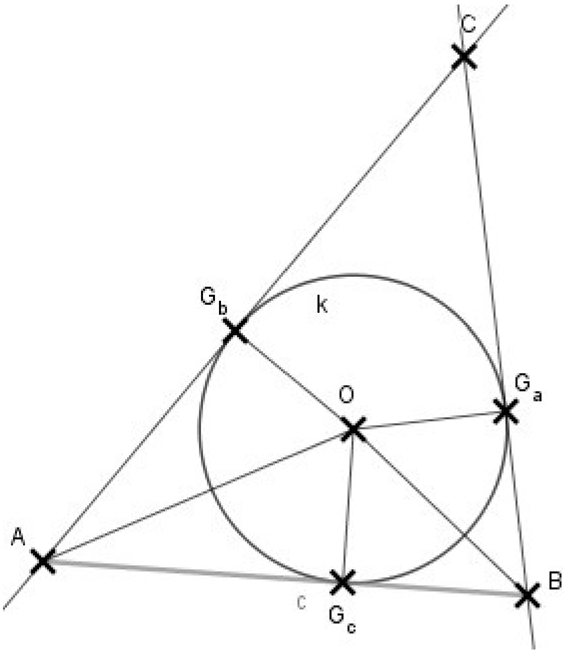
$$\alpha + \beta < 90°$$

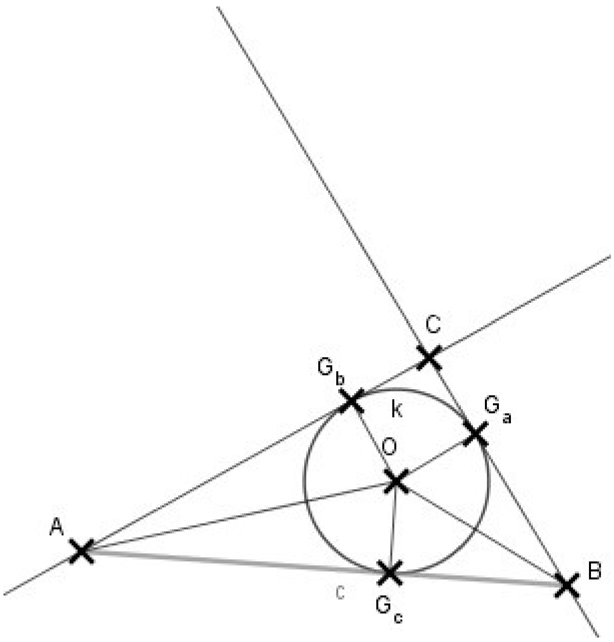
Nyní pohlédněme na vzájemnou polohu bodů A, B, O vzhledem ke zjištěnému vztahu:

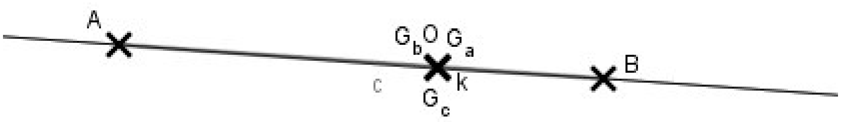
Tvoří-li body A, B, O trojúhelník a je-li součet úhlů $\alpha + \beta < 90°$, znamená to, že třetí úhel musí být větší než 90° (součet vnitřních úhlů trojúhelníka). Trojúhelník $\triangle ABO$ je tedy tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu O.

Netvoří-li body A, B, O trojúhelník, znamená to, že jsou kolineární – to ale k řešení zřejmě nevede. Kolineární poloha bodů by znamenala, že vzdálenost středu kružnice vepsané je od $\overleftrightarrow{AB}$ nulová - kružnice by tak měla nulový poloměr.

Znázorněme zmenšování poloměru v závislosti na vzájemné poloze úsečky AB a středu kružnice vepsané na obrázkách – posouváno bude pouze bodem O směrem k úsečce AB.





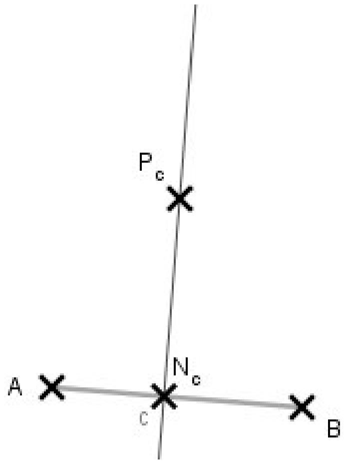


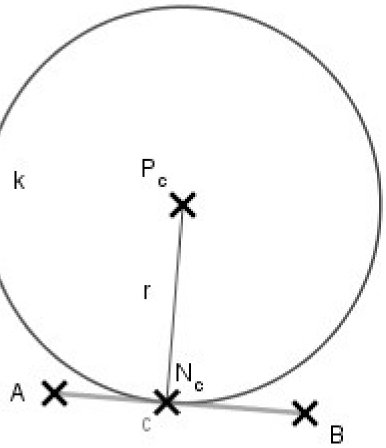
11.Dva vrcholy a střed kružnice připsané

Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, znáte-li polohu vrcholů A, B a a) středu kružnice připsané straně AB a b) středu kružnice připsané jiné straně.

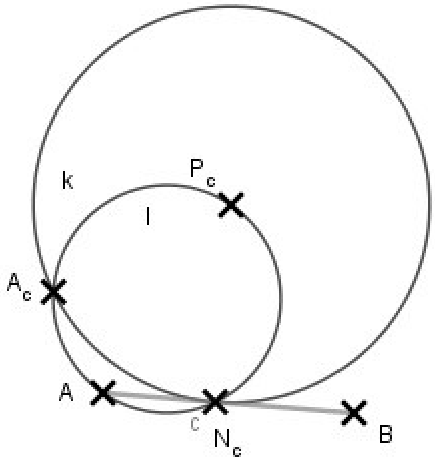
Řešení a):

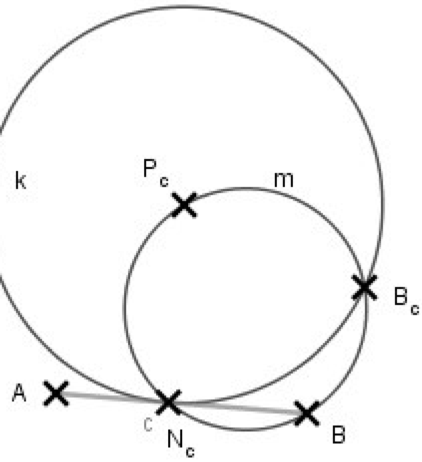
Stejně jako v případě dvou vrcholů a středu kružnice vepsané budeme nejprve chtít vést kolmici na úsečku AB, abychom zjistili poloměr, a mohli tak kružnici následně sestrojit.



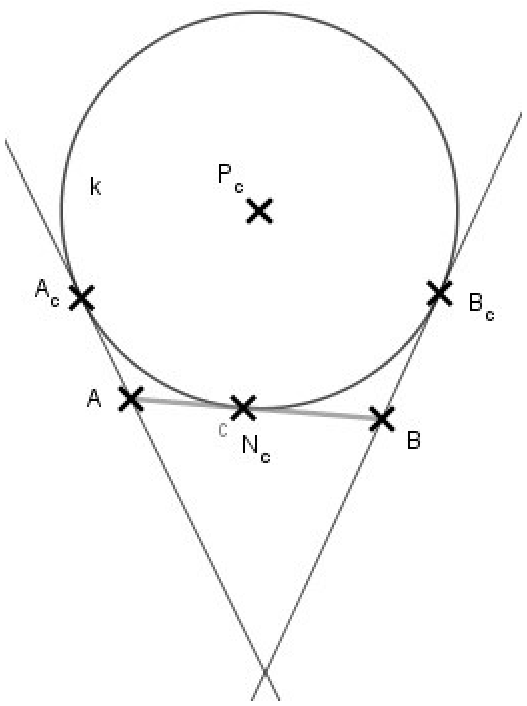


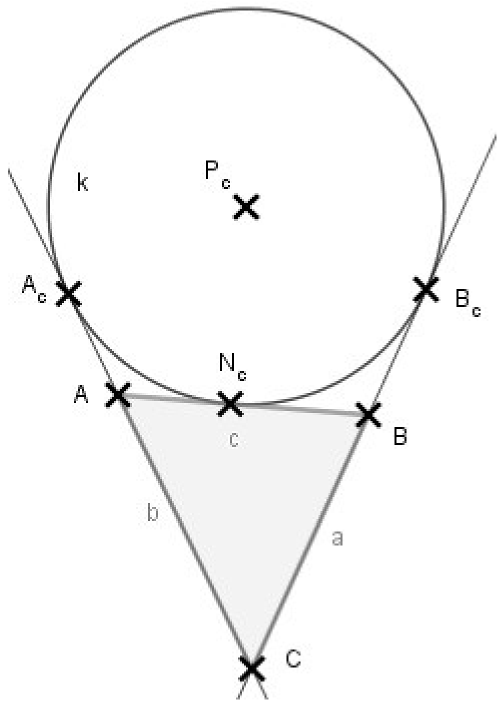
Dále sestrojíme tečny. Obdržíme tak všechny tři přímky, na kterých nalezneme strany trojúhelníka $\triangle ABC$. Pomůžeme si Thaletovou kružnicí – nejprve ji sestrojíme nad úsečkou AP_c, abychom nalezli tečnu z bodu A, následně sestrojíme druhou Thaletovu kružnici nad BP_c a nalezneme tečnu procházející bodem B. Průsečíky označíme postupně A_c, B_c.





Tečny se protnou v jednom společném bodě, jedná se o bod C.





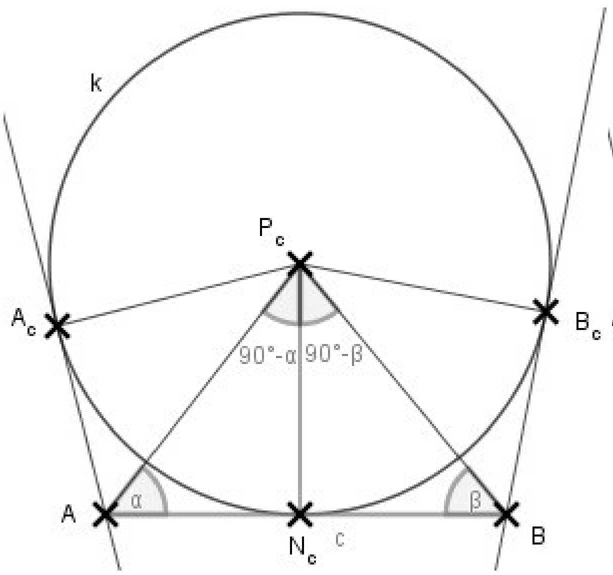
Zápis konstrukce a):

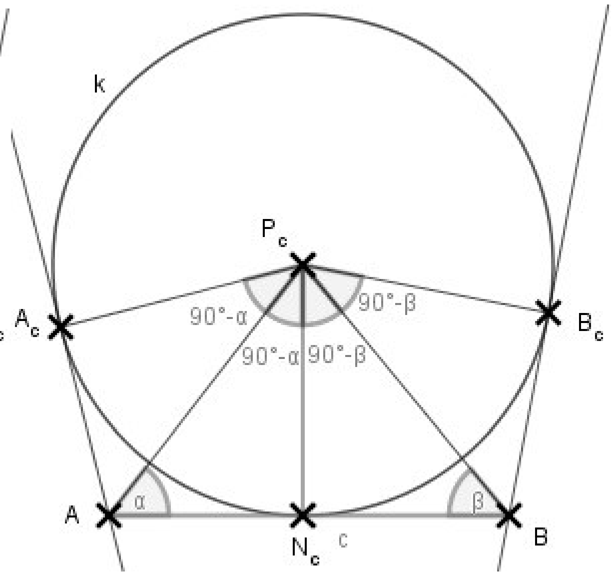
0) A, B, P_c
1) $c = AB$
2) $p; P_c \in p \wedge p \perp AB$
3) $N_c; N_c \in AB \cap p$
4) $k; k(P_c, |P_cN_c|)$
5) $l; l$ *je Thaletova kružnice nad* AP_c
6) $m; m$ *je Thaletova kružnice nad* BP_c
7) $A_c; A_c \in k \cap l$
8) $B_c; B_c \in k \cap m$
9) $\overleftrightarrow{AA_c}$
10) $\overleftrightarrow{BB_c}$
11) $C; C \in \overleftrightarrow{AA_c} \cap \overleftrightarrow{BB_c}$
12) $\triangle ABC$

Diskuze řešení a):

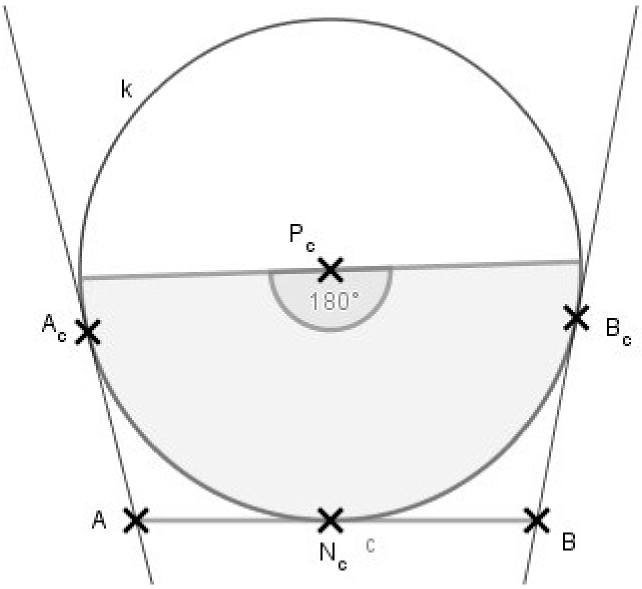
Označíme úhel $\sphericalangle P_cAN_c = \alpha, \sphericalangle P_cBN_c = \beta$. Trojúhelníky $\triangle AN_cP_c$ a $\triangle BN_cP_c$ jsou pravoúhlé. Úhly $\sphericalangle AP_cN_c$ a $\sphericalangle BP_cN_c$ tak nabývají hodnot $90° - \alpha, 90° - \beta$. V sekci Kružnice vepsaná a připsaná jsme zmínili vlastnost kružnice připsané – nachází se na osách dvou vnějších a jednoho vnitřního úhlu trojúhelníka. Čtyřúhelníky $AN_cP_cA_c$ a $BN_cP_cB_c$ jsou tak popořadě souměrné podle os $\overleftrightarrow{AP_c}$ a $\overleftrightarrow{BP_c}$.

Tím získáme i velikost úhlů $\sphericalangle AP_cA_c = 90° - \alpha$ a $\sphericalangle BP_cB_c = 90° - \beta$. Znázorněme všechny zjištěné úhly vzhledem k α a β na obrázkách:





V diskuzi případu tří průsečíků kružnice připsané trojúhelníku jsme zjistili, že je nutné, aby trojúhelník těchto průsečíků (zde $\triangle A_c N_c B_c$) byl tupoúhlý. To nastává v případě, kdy se zmíněné tři body nachází na téže půlkružnici (vyjma případu, kdy dva z nich tvoří průměr kružnice).



Aby toto nastalo, je nutné, aby součet úhlů

$$(90° - \alpha) + (90° - \alpha) + (90° - \beta) + (90° - \beta)$$

nebyl větší nebo roven 180°. Vyjádřeme nerovnicí a upravme:

$$90° - \alpha + 90° - \alpha + 90° - \beta + 90° - \beta < 180°$$

$$360° - 2\alpha - 2\beta < 180°$$

$$180° < 2\alpha + 2\beta$$

$$90° < \alpha + \beta$$

Uvažme nyní body A, B, P_c vzhledem k tomuto zjištění.

Tvoří-li body A, B, P_c trojúhelník, víme, že třetí úhel

$$\sphericalangle AP_cB = 90° - \alpha + 90° - \beta = 180° - (\alpha + \beta)$$

Součet $(\alpha + \beta)$ je větší než 90°, úhel $\sphericalangle AP_cB$ je tak určitě menší než 90°. Úhly α i β jsou také ostré (pokud by některý z nich byl tupý, neobdrželi bychom bod N_c na úsečce AB, a pokud by některý z nich byl pravý, bod N_c by byl roven některému z bodů A, B). Trojúhelník $\triangle ABP_c$ tedy v tomto případě musí být ostroúhlý, aby řešení existovalo.

Netvoří-li body A, B, P_c trojúhelník, víme, že jsou kolineární. Znamenalo by to, že bod P_c náleží přímce AB. Protože se ale jedná o střed kružnice připsané, musela by tato kružnice mít nulový poloměr, což není možné. Kolinearita zadaných bodů tedy k řešení nevede.

Vyjádřeme ještě podmínku existence řešení pomocí cosinové věty. Úhel $\sphericalangle AP_cB$ označíme γ:

$$|AB|^2 = |AP_c|^2 + |BP_c|^2 - 2|AP_c||BP_c|\cos\gamma$$

$$|AP_c|^2 = |AB|^2 + |BP_c|^2 - 2|AB||BP_c|\cos\beta$$

$$|BP_c|^2 = |AB|^2 + |AP_c|^2 - 2|AB||AP_c|\cos\alpha$$

Jelikož je tento trojúhelník ostroúhlý, cosinus je ve všech případech kladný, a členy obsahující cosinus jsou tedy záporné. Jejich odebráním získáme nerovnosti obsahující pouze údaje známé ze zadání:

$$|AB|^2 > |AP_c|^2 + |BP_c|^2$$

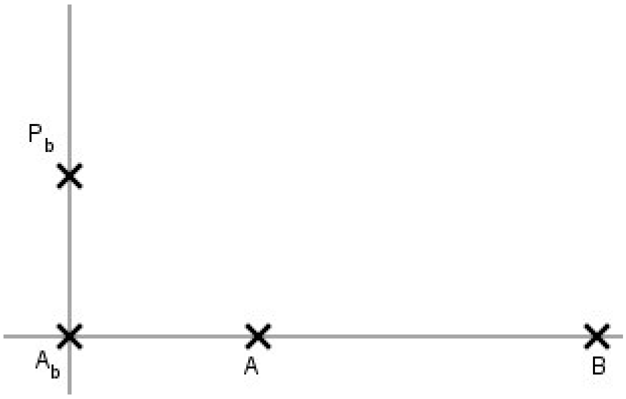
$$|AP_c|^2 > |AB|^2 + |BP_c|^2$$

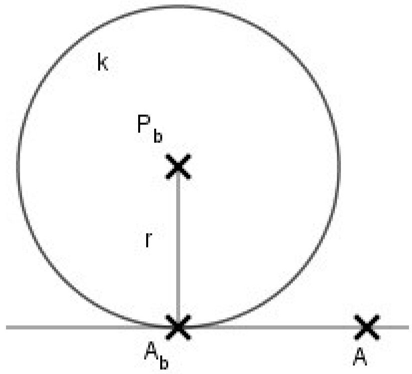
$$|BP_c|^2 > |AB|^2 + |AP_c|^2$$

Řešení b):

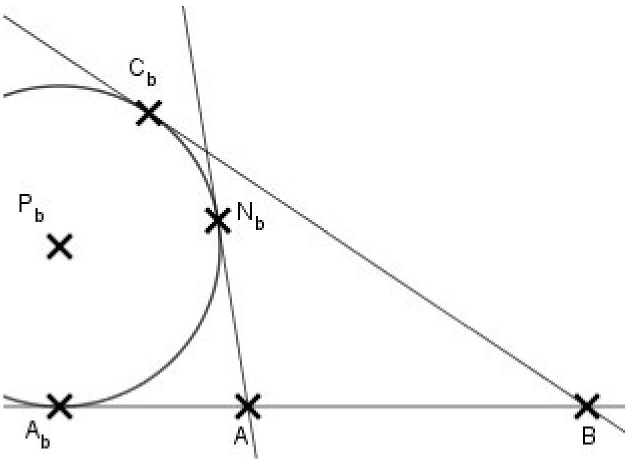
Sestrojíme pro střed kružnice připsané P_b, pro kružnici se středem P_c je postup zcela analogický.

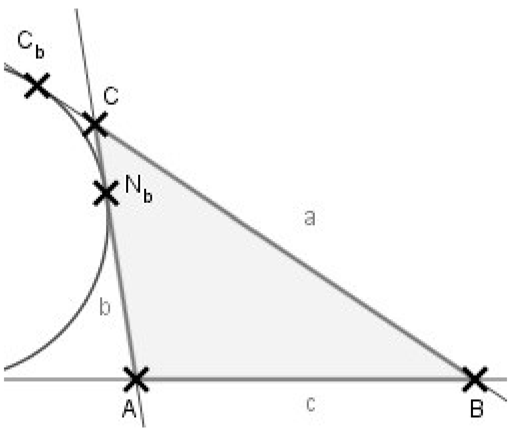
Kružnice je tentokrát připsána jiné straně, je třeba tedy nejprve sestrojit přímku $\overleftrightarrow{AB}$, abychom ji mohli získat, nikoli jen úsečku AB. Sestrojení kolmice na přímku $\overleftrightarrow{AB}$ pro získání průsečíku A_b a poloměru kružnice je již zcela analogické zadání s body A, B, P_c.





Opět sestrojíme pomocí Thaletových kružnic tečny, průsečík na tečně procházející bodem A označíme N_b, průsečík na tečně procházející bodem B označíme C_b. Jejich vzájemným průsečíkem je bod C. Tím je konstrukce dokončena.





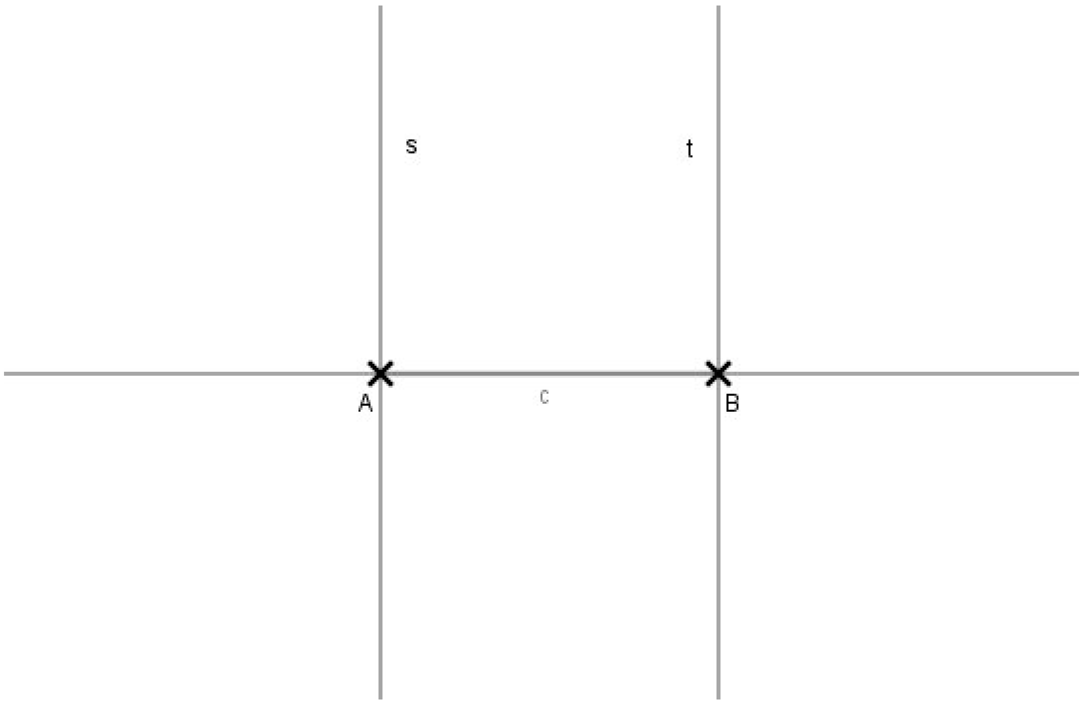
Zápis konstrukce b):

0) A, B, P_b
1) $\overleftrightarrow{AB}$
2) $p; P_b \in p \wedge p \perp \overleftrightarrow{AB}$
3) $A_b; A_b \in \overleftrightarrow{AB} \cap p$
4) $k; k(P_b, |P_b A_b|)$
5) $l; l\ je\ Thaletova\ kružnice\ nad\ AP_b$
6) $m; m\ je\ Thaletova\ kružnice\ nad\ BP_b$
7) $N_b; N_b \in k \cap l$
8) $C_b; C_b \in k \cap m$
9) $\overleftrightarrow{AN_b}$
10) $\overleftrightarrow{BC_b}$
11) $C; C \in \overleftrightarrow{AN_b} \cap \overleftrightarrow{BC_b}$
12) $\triangle ABC$

Diskuze řešení b):

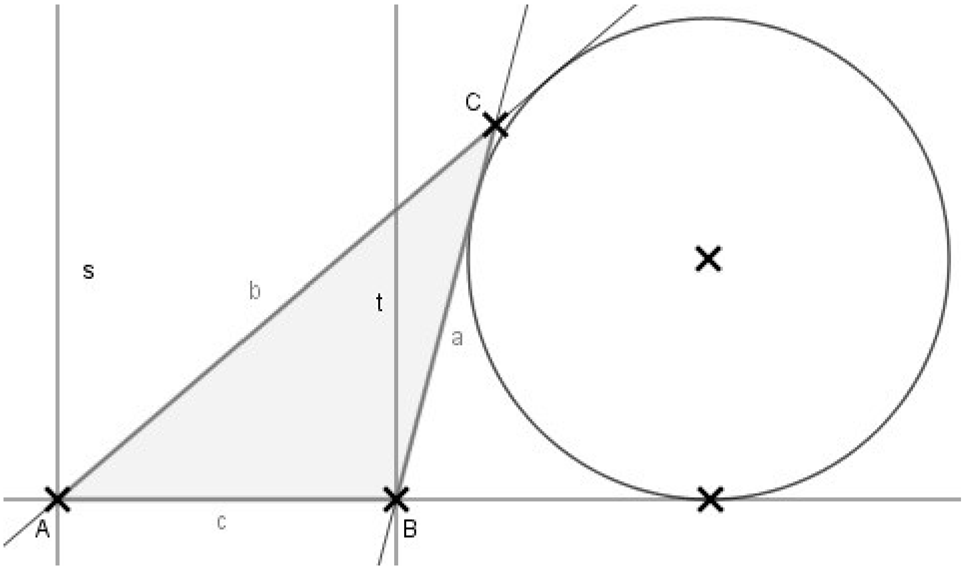
Body A, B, P_b opět zřejmě nemohou být kolineární, protože by kružnice připsaná měla nulový poloměr, což není možné. Dále ale diskuzi formulujme jinak, než jsme ji provedli u kružnice připsané straně, jejíž krajní body známe ze zadání.

Rozdělme rovinu na tři části pomocí kolmic na přímku $\overleftrightarrow{AB}$ v bodech A a B.



V prvních třech bodech konstrukce jsme sestrojovali kolmici na přímku $\overleftrightarrow{AB}$, abychom nalezli poloměr kružnice a mohli ji sestrojit (bod A_b tak můžeme interpretovat jako kolmý průmět bodu P_b na přímku $\overleftrightarrow{AB}$). Trváme-li na značení, určitě není možné, aby se tento průmět nacházel na úsečce AB, protože kružnice připsaná se dotýká jen jedné strany trojúhelníka, v tomhle případě by mohla být připsána pouze straně c.

Dále můžeme pozorovat, že pokud se průmět bude nacházet dále na polopřímce $\longmapsto AB$ (mimo úsečku AB), kružnice může být připsána pouze straně a.



Průměty středu kružnice připsané se tedy nesmí nacházet nikde na polopřímce $\longmapsto AB$. Samotný střed kružnice připsané můžeme tedy vyloučit na celé polorovině sB (včetně hraniční přímky).

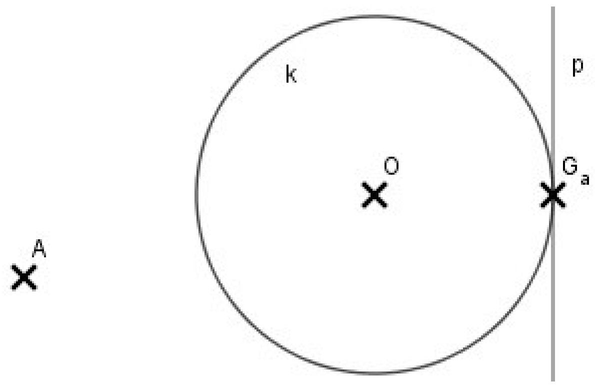
Máme-li tedy střed kružnice připsané P_b mimo polorovinu sB a přímku $\overleftrightarrow{AB}$ a projdeme zbylé body konstrukce, na problém již nenarazíme. Thaletovy kružnice bude možné sestrojit vždy, tečny ke kružnici $\overleftrightarrow{AN_b}$ a $\overleftrightarrow{BC_b}$ budou vždy různoběžné, a bod C tak bude vždy jednoznačně určen.

12.Vrchol, střed kružnice vepsané a její průsečík s protější stranou

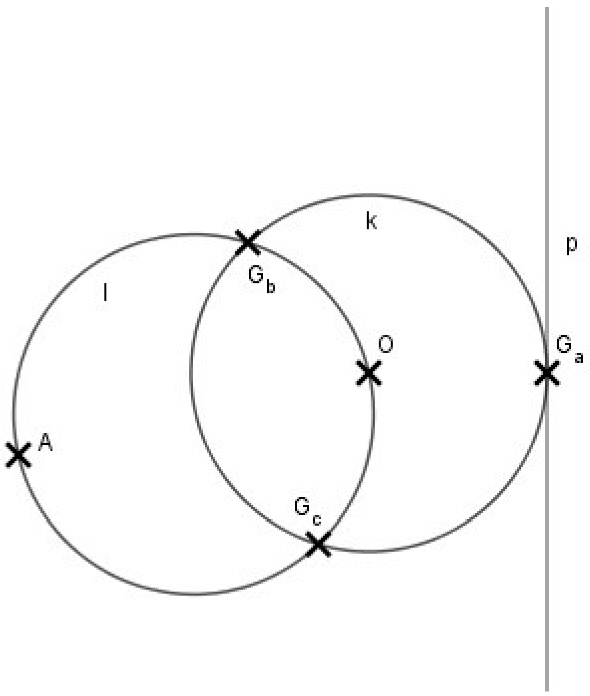
Zadání: Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, máte-li zadán vrchol A, střed kružnice vepsané O a průsečík této kružnice s protější stranou, značen G_a.

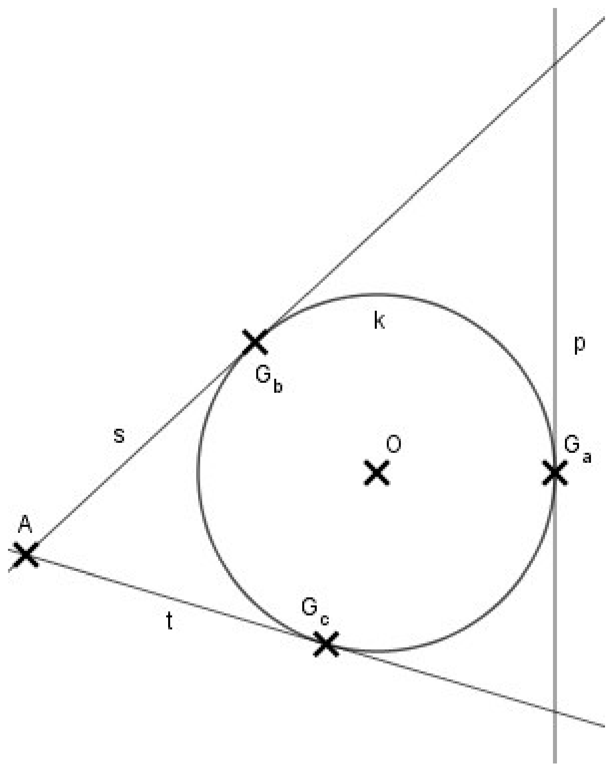
Řešení:

Máme dán střed kružnice a jeden její další bod - začněme tím, že kružnici sestrojíme. Rovněž můžeme také snadno doplnit tečnu k této kružnici v bodě G_a. Tečnu označíme p. Na této tečně budeme později hledat stranu BC.

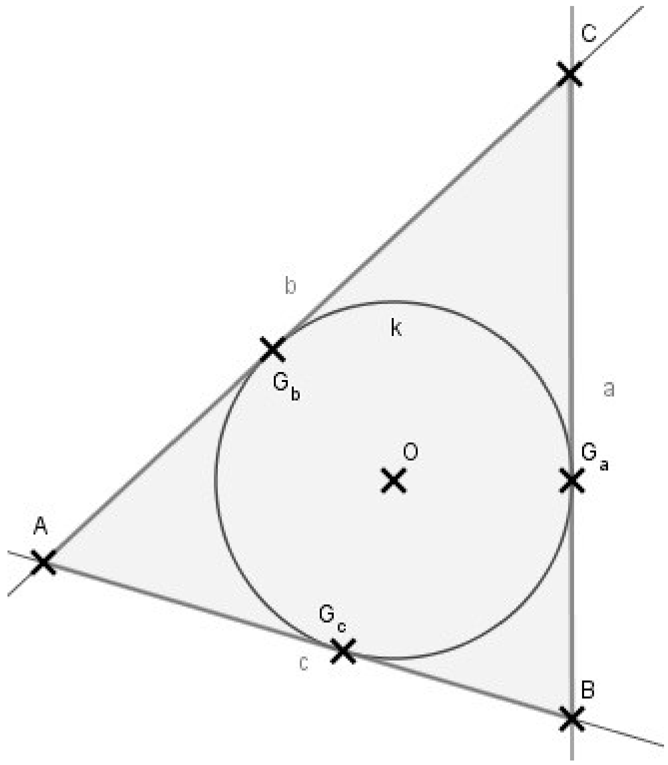


Pomocí Thaletovy kružnice nad úsečkou AO získáme tečny z bodu A ke kružnici k - přímky, na kterých se nachází strany AC a AB. Thaletovu kružnici označíme l , tečny označíme s a t, tečné body G_b a G_c.





Tečny s a t se protínají v přímkou p každá v jednom bodě. Tyto body jsou vrcholy trojúhelníka B a C. Abychom se drželi značení, bod B volíme na $\overleftrightarrow{AG_c}$ a bod C na $\overleftrightarrow{AG_b}$. Znázorněme ještě hotovou konstrukci:



Zápis konstrukce:

0) A, O, G_a
1) $k; k(O, |OG_a|)$
2) $p; G_a \in p \wedge p \perp OG_a$
3) $l; l$ *je Thaletova kružnice nad AO*
4) $G_b, G_c; G_b, G_c = k \cap l \wedge G_b \neq G_c$
5) $s; s = \overleftrightarrow{AG_b}$
6) $t; t = \overleftrightarrow{AG_c}$
7) $B; B = p \cap t$
8) $C; C = p \cap s$
9) $\triangle ABC$

Diskuze řešení:

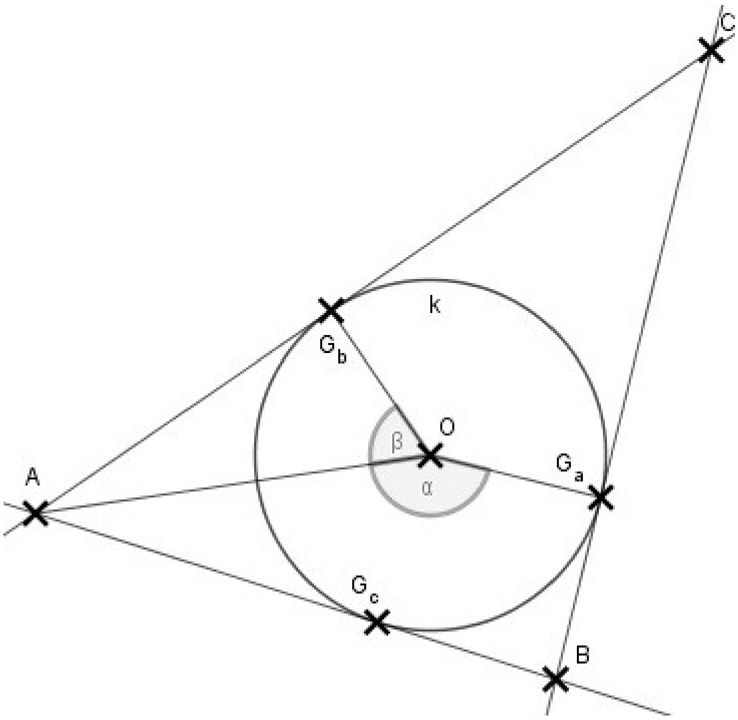
Řešení určitě neexistuje v případě, že se vrchol A nachází uvnitř kruhu tvořeného kružnicí k nebo na kružnici k, protože kružnice, která je trojúhelníku vepsaná, nemůže obsahovat jeden ze svých vrcholů. Zformulujeme-li podmínku pomocí vzdáleností, dostáváme $|AO| > |G_aO|$.

Další situace, která k řešení nemůže vést, je, pokud bude trojúhelník $\triangle G_a G_b G_c$ tupoúhlý nebo pravoúhlý (viz diskuze řešení tří průsečíků kružnice vepsané trojúhelníku).

Chceme tedy trojúhelník $\triangle G_a G_b G_c$ ostroúhlý, kde platí, že jeho vrcholy se nenachází na téže půlkružnici na k. Je zřejmé, že ostroúhlý trojúhelník nezískáme, pokud se G_a nachází uvnitř kruhové výseče příslušné menšímu ze středových úhlů $\sphericalangle G_b O G_c$.

Definujeme úhel $\sphericalangle AOG_a = \alpha$. Aby řešení mohlo existovat, G_a musí být mimo kruhovou výseč popsanou výše. Úhel α tedy jeden z bodů G_b, G_c , v našem případě G_c, obsahuje (diskuzi provedeme jen pro tento případ, druhý je jen otázka přeznačení).

Doplníme úhel obsahující druhý bod a úsečku AO , tím je $\sphericalangle G_b OA = \beta$.



Známe vzdálenosti $|AO|, |OG_a|, |AG_a|$. Úhel α tak určitě můžeme vyjádřit pomocí cosinové věty:

$$|AG_a|^2 = |AO|^2 + |OG_a|^2 - 2|AO||OG_a| \cos \alpha$$

$$2|AO||OG_a| \cos \alpha = |AO|^2 + |OG_a|^2 - |AG_a|^2$$

Aby zadání bylo řešitelné, vzdálenosti musí být nenulové, můžeme jimi tedy dělit:

$$\cos \alpha = \frac{|AO|^2 + |OG_a|^2 - |AG_a|^2}{2|AO||OG_a|}$$

Úhel β uvažme vzhledem k pravoúhlému trojúhelníku $\triangle AG_b O$. Jeho cosinus je roven poměru délek jeho přilehlé odvěsny a přepony, tedy

$$\cos \beta = \frac{|G_b O|}{|AO|}$$

Dělit opět možno bez obav.

Úsečka G_bO je ale stejně dlouhá jako G_aO, protože jsou obě rovny poloměru kružnice k. Můžeme tedy upravit na

$$\cos\beta = \frac{|G_aO|}{|AO|}$$

Chceme, aby součet $\alpha + \beta$ byl větší než $180°$. Aby toto nastalo, musí platit

$$\cos\alpha + \cos\beta < 0$$

Dosadíme-li vztahy získané výše, získáváme

$$\frac{|AO|^2 + |OG_a|^2 - |AG_a|^2}{2|AO||OG_a|} + \frac{|G_aO|}{|AO|} < 0$$

$$\frac{|AO|^2 + |OG_a|^2 - |AG_a|^2}{2|AO|} + \frac{|G_aO|^2}{|AO|} < 0$$

Odstraníme zlomky a obdržíme

$$|AO|^2 + |OG_a|^2 - |AG_a|^2 + 2|G_aO|^2 < 0$$

$$|AO|^2 + 3|G_aO|^2 < |AG_a|^2$$

Závěr

Téma se po kvantitativní stránce ukázalo jako nesmírně vděčné – množství kombinací, které lze mezi významnými body trojúhelníka nalézt, dalece přesahuje rozsah bakalářské práce. Diskuze se v mnohých případech větvily a také předčily, co do rozsahu, kvantitativní očekávání. Ukázalo se tak, že i přes důstojný rozsah má práce spíše úvodní charakter v rámci tohoto tématu.

Práce obsahuje úvahu nad případy, které nevedou k žádnému řešení. Existují ale kombinace bodů, které nebyly uvedeny a naopak mají řešení více. Jmenujme například kombinaci dvou vrcholů a středu kružnice opsané (A, B, S) – třetí vrchol může ležet libovolně na kružnici mimo zbylé dva vrcholy. K nekonečně mnoha řešením může vést i zadání ortocentra, těžiště a středu kružnice opsané (V, T, S). U případů využívajících kružnice vepsané a připsané zmiňme také některé kombinace s nejednoznačným řešením: A, O, G_b ; A, B, G_c ; A, G_b, G_c nebo například O, G_a, G_b.

V zadáních nebyly zahrnuty mnohé významné body v trojúhelníku, jmenovitě paty výšek v trojúhelníku, Nagelův bod, Gergonnův bod a další – množství zadatelných kombinací spolu s nimi dále může snadno narůst.

Případy obsažené v práci se zabývají pouze kombinacemi tří bodů, jednotlivá zadání je ale možné i rozšířit o další požadavky. Takto lze velmi snadno nalézt další případy – můžeme například zadat konstrukci rovnoramenného trojúhelníka, známe-li jeho vrchol, střed kružnice vepsané a bod na této kružnici. Je také možné zadávat více než tři body.

Seznam zdrojů

ŠVRČEK, Jaroslav a VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1988. Polytechnická knižnice (SNTL).

KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7.

BOČEK, Leo a ZHOUF, Jaroslav. *Planimetrie*. 2., rozšířené vydání. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.

KURKA, Štěpán. *Webová aplikace pro výuku planimetrie.* Praha, 2010. Diplomová práce. Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta.